ISBN: 978-958-58347-1-2

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

Quédate
con el Álgebra

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos

EDITORIAL
COORDINADORA QUÉDATE EN COLMAYOR
Ivón Patricia Jaramillo García
CORRECCIÓN DE ESTILO
Ana María Garzón Sepúlveda
Jhara Alejandra Bedoya Londoño
Eduard Alberto García Galeano
DISEÑO GRÁFICO
Steven Buelvas Gil

AUTOR
Javier F. Rodriguez Zuleta

Álgebra. Teoría, Ejemplos y Problemas Resueltos.

13 de julio de 2016

Índice general

1 Conceptos y operaciones fundamentales entre expresiones algebraicas

1.1 Expresiones y concepto de término

El álgebra es la parte de la matemática elemental que estudia a la cantidad en su forma más general. Una cantidad en álgebra se expresa mediante una variable, la cual representa un número real. Para representar una variable se emplean las letras del abecedario o del alfabeto griego. Las letras minúsculas a, b, c y d, se emplean con frecuencia para representar constantes, en tanto que las letras x, y y z se emplean para representar una variable como tal.

En ocasiones es necesario emplear varias letras para representar una constante que cumple algún patrón, en estas situaciones se suelen emplear los subíndices para diferenciar cada valor de la variable. a_1 y a_2 representan constantes diferentes en una secuencia.

Además de las variables, en el álgebra se emplean signos que se pueden clasificar en tres grandes grupos. Hay signos de operación, de relación y de agrupación.

Se emplea un símbolo para representar cada una de las 7 operaciones aritméticas. En algunas oportunidades se emplea más de un signo para representar una operación, es el caso de la multiplicación, la cual se puede entender de forma tácita cuando indicamos ab, o se usa un punto al igual que un $*$, $a \cdot b$ o $a * b$.

Existen otros signos, son los de relación. Un signo de relación Busca establecer una comparación entre variables

Símbolo	Nombre
$\leqslant$	Menor o igual que
$\geqslant$	Mayor o igual que
$<$	Menor que
$>$	Mayor que

Cuadro 1.1: Algunos símbolos de relación

Los signos de agrupación que usualmente se utilizan son el paréntesis corchete y las llaves. Llaves Paréntesis Corchetes

Abordamos ahora el concepto de operación, que es un concepto idéntico al definido en aritmética. En álgebra se pueden realizar las 7 operaciones fundamentales.

Para realizar las operaciones fundamentales entre expresiones algebraicas, necesitamos comprender cómo se escriben y representan los elementos constitutivos y fundamentales de la misma.

El elemento constitutivo más simple de una expresión algebraica es el término algebraico. Un término algebraico es una expresión conformada fundamentalmente por una parte variable y un coeficiente. La parte variable está representada mediante las letras del abecedario y cada una de ellas cuenta con un exponente distinto de cero. Su coeficiente es un número real.

Ejemplo 1.1 –Término Algebraico.

En la expresión $-\frac{3}{5}x^3y$, su coeficiente es $-\frac{3}{5}$ y la parte variable x^3y.

Una expresión algebraica está conformada por la adición, sustracción, división, potenciación, radicación de términos algebraicos.

Ejemplo 1.2 –Expresiones Algebraicas.

1. $5a^2b^3+\sqrt{a^2+b^2}$
2. $32-(a-b^3)^2$
3. $\dfrac{\sqrt{\pi}a}{-5a^3}$
4. $\sqrt{4x^2-3x+8}$

Es importante señalar que en álgebra existe otro concepto como es el de función. Una función puede ser interpretada como una operación, sin embargo, las funciones no son términos algebraicos como tal, según lo anterior $\cos\theta$ no es un término.

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar según las operaciones que tiene la expresión. Como ejemplo se pueden citar expresiones racionales, irracionales o enteras. En el ejemplo anterior, la expresión del literal 2, es entera, en tanto que la 3, es racional.

1.2 Polinomios

Entre las expresiones algebraicas, existen un tipo muy especial que por su importancia en el álgebra merecen un trato diferente, estas son las expresiones polinónicas

Se puede definir un polinomio en una variable de la siguiente manera.

Definición 1.1 Polinomio

La expresión

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es un polinomio en la variable x de grado n, y n Entero positivo.

En términos generales un polinomio es una expresión algebraica cuyas variables tienen exponentes que son enteros positivos, como $x^5 y^5 + x^4$ o $xy^2 - 5xy + y$. El grado de un polinomio corresponde al valor del mayor exponente n que aparece en la variable, así que un polinomio como x^4, tiene grado 4.

Clasificación de polinomios según su grado y el número de términos

Los polinomios se pueden clasificar según el grado o la cantidad de términos que lo conforman.

De acuerdo con su grado existen polinomios constantes, lineales, cuadráticos y cúbicos que corresponden a polinomios cuyo exponente o grado es 0, 1, 2 y 3. Cuando un polinomio Tiene grado 4 o superior, en general se le continúa denominando polinomio.

Según la cantidad de términos, encontramos que los polinomios se pueden clasificar como, monomio, binomio y trinomio cuando tienen 1, 2 o 3 términos, respectivamente.

Denominación	Monomio	Binomio	Trinomio	Polinomio
Lineal	xy	$a+b$	$x+y-8$	$xy+xz+xz+ax+by$
Cuadrático	x^2y	x^2-y	x^2-a^2+y	$x^2+x+y+z^2-4$
Cúbico	xz^3	c^3+d^2	$a^3b-ab+a$	$a^3+b^2-ac^2-ab$
Grado Mayor de 4	a^4	x^6x+2	$x^6+y-\sqrt{2}$	$x^6-x^5+x^3-x^2+x$

Cuadro 1.2: Clasificación de los Polinomios

En secciones posteriores encontraremos que según la cantidad de términos y el grado del polinomio, se establecerán definiciones de tipos de polinomios más específicos.

Cuando se escribe o representa un polinomio, se suelen escribir los términos ordenados según el alfabeto y cuando la variable en el polinomio es la misma, predomina en primer lugar la que tiene mayor grado. En la tabla anterior, el polinomo de grado mayor a 4 está escrito según esta precisión.

1.3 Adición y sustracción de polinomios

En el texto daremos prelación a los procedimientos, es decir, buscamos que el lector comprenda que las matemáticas son una disciplina en la cual se aplican definiciones, conceptos, propiedades y teoremas, lo cuales se usan al momento de efectuar operaciones entre expresiones algebraicas. Cuando se realiza una determinada operación, es muy importante tener presente un esquema de trabajo ya que la matemática es una disciplina esencialmente escrita y por tanto, el orden y coherencia de la escritura es fundamental.

Según lo anterior, en el texto daremos prelación a los procedimientos y siempre que sea posible, haremos una lista exhaustiva que permita comprender todos y cada uno de los pasos realizados cuando se hacen unas determinadas operaciones entre expresiones algebraicas.

Un término es una expresión que contiene una parte variable. Cada variable representa una cantidad cualesquiera.

Definición 1.2 Términos semejantes

Dos términos son semejantes cuando tienen idéntica parte variable.

Procedimiento 1.1 –Adición/Sustracción de términos semejantes.
Cuando se va a calcular la suma o diferencia entre dos o más términos, estos deben ser semejantes y para efectuar la operación, ésta se aplica entre sus coeficientes, permaneciendo la parte variable igual

A modo de analogía, supóngase que se quieren sumar las longitudes de los lados de un cuadrilátero. Si estos miden 2cm, 5cm, 3cm y 4cm, al calcular el perímetro, que es la suma de los cuatro lados, el resultado 14cm, tiene como unidad centímetros. Esta analogía nos sirve para entender que cuando se suman o restan dos o más términos semejantes, su resultado definitivo debe contener la misma parte variable, En otras palabras, debe ser semejante a los términos sumados.

Ejemplo 1.3 –Simplificación o reducción de términos semejantes.

Simplificar $6ax + 7x - 10ax + 11x$.
Efectuamos la operación entre los términos semejantes:
$6ax - 10ax = -4ax$
$7x + 11x = 18x$, para obtener que
$6ax + 7x - 10ax + 11x = -4ax + 18x$

Observamos que en el ejemplo los términos de la respuesta, son semejantes a los términos del enunciado.

1.4 Ley distributiva y multiplicación de polinomios

Sin pérdida de generalidad, vamos a explicar la multiplicación de expresiones algebraicas a partir de la multiplicación de polinomios.

Cuando se multiplican dos monomios como a^3 por a^5, el resultado que se obtiene es a^8. Para entender cuál es la razón de esta expresión, vamos a recurrir a la definición de potenciación. Entendemos a^3 como el producto de $a \cdot a \cdot a$ y a^5 es $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Aplicando nuevamente la definición de potenciación, es claro ver que $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ se puede expresar como a^8. En este análisis se ha aplicado una ley de la potenciación, la cual establece que cuando se multiplican dos potencias con igual base, el resultado es una potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes que tenían las bases dadas.

En el caso de dos monomios cuyo coeficiente no es el 1, se debe considerar la multiplicación de los coeficientes como el coeficiente que tiene el resultado. Cuando se multiplican los coeficientes hay que tener presente el uso de la ley de los signos.

Ejemplo 1.4 –Multiplicaión de monomios.

Simplificar

1. $3ax \cdot 8ax^3 = 24a^2x^4$
2. $\dfrac{3}{4}x^5 \cdot 16xy = 12x^6y$
3. $(-4xy)(-5x^2y^3) = 20x^3y^4$

En resumen, hay que decir que al Multiplicar dos monomios, se deben multiplicar los signos de sus coeficientes, luego los coeficientes y finalmente aplicar la ley de los exponentes.

El uso de los signos de agrupación para indicar el producto de polinomios, suele ser la mejor sintaxis, así que lo sucesivo las multiplicaciones entre expresiones se representaran de esta forma.

Cuando se multiplican dos polinomios, se debe emplear el siguiente orden: Multiplicar cada término del primer polinomio por todos y cada uno de los términos del segundo polinomio, teniendo precaución cuando se están multiplicando los coeficientes, en usar la ley de los signos.

Este procedimiento se conoce como la Ley distributiva.

Propiedad 1.1 Sean a, b y c ℝeales, entonces se cumple que:[1]

$$a(b+c) = ab + ac$$

los dos ejemplos siguientes muestran una estrategia de multiplicación de expresiones algebraicas. los ejercicios ejemplifican una serie de pasos que funciona en una gran variedad de ejercicios.

Ejemplo 1.5 –Multiplicación de polinomios.

Simplificar

Ejercicio dado	Ley distributiva y de exponentes	Simplificación y ordenación
$ax(x-a)$	$ax^2 - a^2x$	
$4xy^2(2xy - 5x^2y^2)$	$8x^2y^3 - 20x^3y^4$	$-20x^3y^4 + 8x^2y^3$
$-3ab(4ab^3 - 9a^2b^2)$	$-12a^2b^4 + 27a^3b^3$	$27a^3b^3 - 12a^2b^4$
$(3x+4y)(2x-3y)$	$6x^2 - 9xy + 8xy - 12y^2$	$6x^2 - xy - 12y^2$
$\left(\frac{1}{2}xy+2\right)\left(\frac{1}{2}xy-2\right)$	$\frac{1}{4}x^2y^2 - xy + xy - 4$	$\frac{1}{4}x^2y^2 - 4$
$(a+b-c)(3a-b-2c)$	$3a^2 - ab - 2ac + 3ab - b^2 - 2bc - 3ac + bc + 2c^2$	$3a^2 + 2ab - 5ac - b^2 - bc + 2c^2$
$(x^{-1}+6)(x-8)$	$1 - 8x^{-1} + 6x - 48$	$6x - 8x^{-1} - 47$

Cuando se multiplican expresiones algebraicas en general, se procede de igual forma que al multiplicar polinomios.

[1] En factorización, se usa esta la ley así: $ab + ac = a(b+c)$ y a este proceso se le conoce como factor común

Ejemplo 1.6 –Multiplicación de polinomios.

Simplificar

Ejercicio dado	Reescribir	Ley distributiva y de exponentes	Simpificar y reescribir
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)$	$x^{1/2}\left(x^{1/2}+3\right)$	$x+3x^{1/2}$	$x+3\sqrt{x}$
$\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x}-4\right)$	$x^{3/2}\left(x^{1/2}-4\right)$	$x^2-4x^{3/2}$	$x^2-4\sqrt{x^3}$
$\frac{1}{x^2}\left(3x^2+\sqrt{x}\right)$	$x^{-2}\left(3x^2+x^{1/2}\right)$	$3+x^{-3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{x^3}}+3$
$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+6\right)$	$\left(x^{1/2}-3\right)\left(x^{1/2}+6\right)$	$x+6x^{1/2}-3x^{1/2}-18$	$x+3\sqrt{x}-18$
$\left(\frac{3}{x}-4x\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$	$\left(3x^{-1}-4x\right)\left(x^{-2}+x^{-1}\right)$	$3x^{-3}+3x^{-2}-4x^{-1}-4$	$\frac{3}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}-4$

Productos notables

Existen ciertas estructuras multiplicativas que por la frecuencia que aparecen en los distintos cálculos que se efectúan en matemáticas, resulta conveniente establecer fórmulas que permitan realizarlos de forma rápida y simple.

Propiedad 1.2 Producto de una suma por una diferencia

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Para emplear los distintos productos notables, se puede usar la siguiente estrategia, la cual ejemplificamos de la siguiente forma.

Ejemplo 1.7 –Ejemplo.

Efectuar la multiplicación, empleando productos notables.

Ejercicio dado	$(x+4)(x-4)$
Se identifica A y B	$A=x$ y $B=4$
Se escribe la fórmula del producto notable, reemplazando con paréntesis a A y B	$(\quad)^2-(\quad)^2$
Se completan los espacios de la formula con los valores de A y B	$(x)^2-(4)^2$
Se hacen las operaciones indicadas, potenciaciones y demás simplificaciones	x^2-4

Con esta estrategia se logran minimizar los errores relacionados con signos y la simplificación de las operaciones que aparecen indicadas luego de aplicar el producto notable.

Ejemplo 1.8 –Aplicación productos notables: Suma por Diferencia.

Efectuar la multiplicación, aplicando productos notables

Fórmula a aplicar

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2=(\quad)^2-(\quad)^2$$

Ejercicio dado	Identificar A y B		Rellenar espacios	Operar y Simplificar
$(3x+2)(3x-2)$	$A=3x$	$B=2$	$(3x)^2-(2)^2$	$9x^2-4$
$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$A=x$	$B=\frac{1}{2}$	$(x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$x^2-\frac{1}{4}$
$\left(\frac{1}{x}+z\right)\left(\frac{1}{x}-z\right)$	$A=\frac{1}{x}$	$B=z$	$\left(\frac{1}{x}\right)^2-(z)^2$	$\frac{1}{x^2}-z^2$
$(5^x+y)(5^x-y)$	$A=5^x$	$B=y$	$(5^x)^2-(y)^2$	$5^{2x}-y^2$
$(\cos x+6)(\cos x-6)$	$A=\cos x$	$B=6$	$(\cos x)^2-(6)^2$	$\cos^2 x-36$

Las identidades de productos notables tienen integrados los signos, es decir, cuando se seleccionan A y B, se omiten los signos, excepto en la multiplicación de binomios semejantes dos a dos y en la fórmula del cuadrado de un trinomio, en la cual hay que reemplazar con los signos que corresponde en cada término.

Propiedad 1.3 Producto de dos binomios semejantes dos a dos

$$(x+B)(x+D)=x^2+(D+B)x+BD$$

$$(Ax+B)(Cx+D)=ACx^2+(AD+BC)x+BD$$

Ejemplo 1.9 –Aplicación productos notables: Binomios semejantes dos a dos.

Efectuar la multiplicación, aplicando productos notables

Fórmula a aplicar

$$(x+B)(x+D)=x^2+(D+B)x+BD=x^2+[()+()]\,x+()()$$

Ejercicio dado	Identificar B y D		Rellenar espacios	Operar y simplificar
$(x+8)(x+4)$	$B=8$	$D=4$	$x^2+[(8)+(4)]\,x+(8)(4)$	$x^2+12x+32$
$(x-6)(x+2)$	$B=-6$	$D=2$	$x^2+[(-6)+(2)]\,x+(-6)(2)$	$x^2-4x-12$
$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+10)$	$B=-1$	$D=10$	$x+[(-1)+(10)]\sqrt{x}+(-1)(10)$	$x+9\sqrt{x}-10$
$\left(\frac{1}{x}+5\right)\left(\frac{1}{x}-7\right)$	$B=5$	$D=-7$	$\frac{1}{x^2}+[(5)+(-7)]\,\frac{1}{x}+(5)(-7)$	$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-35$

Ejemplo 1.10 –Aplicación productos notables: Binomios semejantes dos a dos.

Efectuar la multiplicación, aplicando productos notables

Fórmula a aplicar

$$(Ax+B)(Cx+D)=ACx^2+(AD+BC)x+BD=()()x^2+[()()+()()]x+()()$$

Ejercicio dado	Identificar A	B	C	D	Rellenar espacios	Operar y simplificar
$(2x+3)(4x+5)$	2	3	4	5	$(2)(4)x^2+[(2)(5)+(3)(4)]x+(4)(5)$	$8x^2+22x+20$
$(2x+1)(-3x-8)$	2	1	-3	-8	$(2)(-3)x^2+[(2)(-8)+(1)(-3)]x+(1)(-8)$	$-6x^2-19x-8$
$(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-4)$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	-4	$(\sqrt{2})(\sqrt{2})x^2+[(\sqrt{2})(-4)+(1)(\sqrt{2})]x+(\sqrt{2})(-4)$	$2x^2-3\sqrt{2}x-4$
$(-\tan\theta+2)(3\tan\theta-4)$	-1	2	3	-4	$(-1)(3)\tan^2\theta+[(-1)(-4)+(2)(3)]\tan\theta+(3)(-4)$	$-3\tan^2\theta+10\tan\theta-8$

Notemos como en los últimos ítems de los ejemplos anteriores se extrapola la aplicación de los productos notables a expresiones que no son idénticas en un sentido estricto, pero sí tienen la estructura algébrica y por tanto se pueden operar aplicando las formulas dadas.

Propiedad 1.4 Cuadrado de una suma o diferencia

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$$

Ejemplo 1.11 –Aplicación productos notables: Cuadrado de una suma o diferencia.

Efectuar la multiplicación, aplicando productos notables

Fórmulas a aplicar

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 = ()^2+2()()+()^2$$
$$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2 = ()^2-2()()+()^2$$

Ejercicio dado	Identificar A	B	Rellenar espacios	Operar y simplificar
$(x+4)^2$	x	4	$(x)^2+2(x)(4)+(4)^2$	$x^2+8x+16$
$(3x^2+y)^2$	$3x^2$	y	$(3x^2)^2+2(3x^2)(y)+(y)^2$	$9x^4+6x^2y+y^2$
$(2\sqrt{x}+3)^2$	$2\sqrt{x}$	3	$(2\sqrt{x})^2+2(2\sqrt{x})(3)+(3)^2$	$4x+12\sqrt{x}+9$
$\left(\frac{3}{x}+2y\right)^2$	$\frac{3}{x}$	$2y$	$\left(\frac{3}{x}\right)^2+2\left(\frac{3}{x}\right)(2y)+(2y)^2$	$\frac{9}{x^2}+\frac{12y}{x}+4y^2$
$(4x-3y^2)^2$	$4x$	$3y^2$	$(4x)^2-2(4x)(3y^2)+(3y^2)^2$	$16x^2-24xy^2+9y^4$
$(\sec\theta-\sqrt{2})^2$	$\sec\theta$	$\sqrt{2}$	$(\sec\theta)^2-2(\sec\theta)(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2$	$\sec^2\theta+2\sqrt{2}\sec\theta+2$
$\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2y\right)^2$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{2}{3}x^2y$	$\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{2}{3}x^2y\right)+\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^2$	$\frac{4x^4y^2}{9}-\frac{2x^3y}{3}+\frac{x^2}{4}$
$\left(e^x-\frac{3}{2}e^{-x}\right)^2$	e^x	$\frac{3}{2}e^{-x}$	$(e^x)^2-2(e^x)\left(\frac{3}{2}e^{-x}\right)+\left(\frac{3}{2}e^{-x}\right)^2$	$e^{2x}-3+\frac{9e^{-2x}}{4}$

Propiedad 1.5 Cuadrado de un trinomio

$$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

El ejemplo siguiente ilustra que en la identificación de A, B y C, los términos se seleccionan con su correspondiente signo; estos ejercicios permiten enfatizar sobre la estrategia de usar los paréntesis, y así evitar errores relacionados con los signos.

Ejemplo 1.12 –Aplicación productos notables: Cuadrado de un trinomio.

Efectuar la multiplicación, aplicando productos notables

Fórmulas a aplicar

$$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC = ()^2+()^2+()^2+2()()+2()()+2()()$$

Ejercicio dado	Identificar A	B	C	Rellenar espacios/Operar y simplificar
$\left(x+2y-z^2\right)^2$	$A=x$	$B=2y$	$C=-z^2$	$(x)^2+(2y)^2+(-z^2)^2+2(x)(2y)+2(x)(-z^2)+2(2y)(-z^2)$ $x^2+4y^2+z^4+4xy-2xz^2-4yz^2$
$\left(3x-2y-1\right)^2$	$A=3x$	$B=-2y$	$C=-1$	$(3x)^2+(-2y)^2+(-1)^2+2(3x)(-2y)+2(3x)(-1)+2(-2y)(-1)$ $9x^2+4y^2+1-12xy-6x+4y$
$\left(\frac{x}{2}-2y+3\right)^2$	$A=\frac{x}{2}$	$B=-2y$	$C=3$	$\left(\frac{x}{2}\right)^2+(-2y)^2+(3)^2+2\left(\frac{x}{2}\right)(-2y)+2\left(\frac{x}{2}\right)(3)+2(-2y)(3)$ $\frac{x^2}{4}+4y^2+9-2xy+3x-12y$
$\left(\sqrt{x}+x+x^{-1}\right)^2$	$A=\sqrt{x}$	$B=x$	$C=x^{-1}$	$\left(\sqrt{x}\right)^2+(x)^2+\left(x^{-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x}\right)(x)+2\left(\sqrt{x}\right)\left(x^{-1}\right)+2(x)\left(x^{-1}\right)$ $x+x^2+x^{-2}+2x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+2$ $x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}+2$

Propiedad 1.6

Cubo de una suma

$$(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right) = A^3+B^3$$

Cubo de una diferencia

$$(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right) = A^3-B^3$$

Ejemplo 1.13 –Aplicación productos notables: Producto especial.

Fórmulas a aplicar

$$(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)=A^3+B^3=()^3+()^3$$

$$(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3=()^3-()^3$$

Ejercicio dado	Identificar A	B	Rellenar espacios	Operar y simplificar
$\left(x^2-2\right)\left(x^4+2x^2+4\right)$	$A=x^2$	$B=2$	$\left(x^2\right)^3-(2)^3$	x^6-8
$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}^2+3\sqrt{x}+9\right)$	$A=\sqrt{x}$	$B=3$	$\left(\sqrt{x}\right)^3-(3)^3$	$\sqrt{x}^3-27$
$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\right)$	$A=\cos\theta$	$B=\frac{1}{2}$	$(\cos\theta)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\cos^3\theta-\frac{1}{8}$
$\left(\frac{1}{x}+y\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2\right)$	$A=\frac{1}{x}$	$B=y$	$\left(\frac{1}{x}\right)^3+(y)^3$	$\frac{1}{x^3}+y^3$
$\left(\frac{1}{4}+2y^2\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}y^2+4y^4\right)$	$A=\frac{1}{4}$	$B=2y^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(2y^2\right)^3$	$\frac{1}{64}+8y^6$
$\left(\frac{3}{2}xy+4\right)\left(\frac{9}{4}x^2y^2-6xy+16\right)$	$A=\frac{3}{2}xy$	$B=4$	$\left(\frac{3}{2}xy\right)^3-(4)^3$	$\frac{27x^3y^3}{8}+64$

Propiedad 1.7 Productos cuyo resultado es de la forma A^n-B^n con n Entero positivo.

$$\begin{aligned}
(A-B)(A^2+AB+B^2) &= A^3-B^3\\
(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3) &= A^4-B^4\\
(A-B)(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4) &= A^5-B^5\\
(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1}) &= A^n-B^n
\end{aligned}$$

El los dos ejemplos que siguen, el lector debe identificar que se satisfacen las fórmulas correspondientes, tomando como base el primer factor, identificando que si $A=xy$ entonces $A^3=x^3y^3$, y así sucesivamente.

Ejemplo 1.14 –Aplicación productos notables: Productos especiales.

Efectuar las multiplicaciones empleando productos notables.

Ejercicio dado	Aplicar fórmula	operar y simplificar
$(xy-2)\left(x^3y^3+2x^2y^2+4xy+8\right)$	$(xy)^4-(2)^4$	x^4y^4-16
$(x^2y-3)(x^8y^4+3x^6y^3+9x^4y^2+27x^2y+81)$	$\left(x^2y\right)^5-(3)^5$	$x^{10}y^5-243$
$(2x-y^2)\left(32x^5+16x^4y^2+8x^3y^4+4x^2y^6+2xy^8+y^{10}\right)$	$(2x)^6-\left(y^2\right)^6$	$64x^6-y^{12}$

Propiedad 1.8 Productos cuyo resultado es de la forma $A^n + B^n$ con n Entero impar positivo.

$$\begin{aligned}
&(A+B)(A^2-AB+B^2) &&= A^3+B^3\\
&(A+B)(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4) &&= A^5+B^5\\
&(A+B)(A^6-A^5B+A^4B^2-A^3B^3+A^2B^4-AB^5+B^6) &&= A^7+B^7\\
&(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\cdots+A^2B^{n-3}-AB^{n-2}+B^{n-1}) &&= A^n+B^n
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.15 –Aplicación productos notables: Productos especiales.

Efectuar las multiplicaciones empleando productos notables.

Ejercicio dado	Aplicar fórmula	operar y simplificar
$(a+x^2y)(a^4-a^3x^2y+a^2x^4y^2-ax^6y^3+x^8y^4)$	$(a)^5+(x^2y)^5$	$a^5+x^{10}y^5$
$(x^2+2)(x^12-2x^10+4x^8-8x^6+16x^4-32x^2+64)$	$(x^2)^7+(2)^7$	$x^{14}+128$
$(xy^2+1))(x^8y^{16}-x^7y^{14}+x^6y^{12}-x^5y^{10}+x^4y^8-x^3y^6+x^2y^4-xy^2+1)$	$(xy^2)^9+(1)^9$	$x^9y^{18}+1$

Una identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor en el dominio de la expresión. Las identidades de Legendre y Lagrange se emplean para simplificar expresiones de manera muy optima, aunque las expresiones no estén enunciadas como productos.

Propiedad 1.9 Identidades de legendre

$$(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$$

$$(A+B)^2+(A-B)^2=2\left(A^2+B^2\right)$$

Ejemplo 1.16 –Aplicación: Identidades de Legendre.

Simplificar empleando Identidades de Legendre.

Ejercicio dado	Aplicar fórmula	operar y simplificar
$(x+4)^2-(x-4)^2$	$4\,(x)\,(4)$	$16x$
$(2x+3)^2-(2x-3)^2$	$4\,(2x)\,(3)$	$24x$
$(e^x+2)^2-(e^x-2)^2$	$4\,(e^x)\,(2)$	$8e^x$
$\left(\frac{x}{y}+4\right)^2-\left(\frac{x}{y}-4\right)^2$	$4\left(\frac{y}{x}\right)(4)$	$\frac{16x}{y}$
$\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}\right)^2$	$4\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{8x}{3}$
$(x+2)^2+(x-2)^2$	$2\left[(x)^2+(2)^2\right]$	$2\left(x^2+4\right)$
$(2x+3)^2+(2x-3)^2$	$2\left[(2x)^2+(3)^2\right]$	$2(4x^2+9)$
$(\cos x+4)^2+(\cos x-4)^2$	$2\left[(\cos x)^2+(4)^2\right]$	$2\left(\cos^2 x+16\right)$
$\left(\frac{1}{2}+e^x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-e^x\right)^2$	$2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+(e^x)^2\right]$	$2\left(\frac{1}{4}+e^{2x}\right)$

Propiedad 1.10 Identidad de lagrange

$$(Ax+By)^2+(Ay-Bx)^2=\left(x^2+y^2\right)\left(A^2+B^2\right)$$

Ejemplo 1.17 –Aplicación: Identidad de Lagrange.

Simplificar empleando la Identidad de Lagrange.

Ejercicio dado	Aplicar fórmula	operar y simplificar
$(3x+2)^2+(3-2x)^2$	$\left[(x)^2+(1)^2\right]\left[(3)^2+(2)^2\right]$	$13\left(x^2+1\right)$
$\left(3x+4y\right)^2+\left(3y-4x\right)^2$	$\left[(x)^2+\left(y\right)^2\right]\left[(3)^2+(4)^2\right]$	$25\left(x^2+y^2\right)$
$\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2+\left(\frac{y}{2}-2x\right)^2$	$\left[(x)^2+\left(y\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2\right]$	$\frac{17}{4}\left(x^2+y^2\right)$
$\left(2x^2+\frac{y}{3}\right)^2+\left(2y-\frac{x^2}{3}\right)^2$	$\left[\left(x^2\right)^2+\left(y\right)^2\right]\left[(2)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$	$\frac{37}{9}\left(x^4+y^2\right)$

1.5 El algoritmo para la división de polinomios

La división algebraica es un procedimiento por medio del cual se establece Cuántas veces una expresión está contenida en otra.
Los términos de la división se conocen como divisor, dividendo, cociente y residuo. La siguiente propiedad expresa la relación existente entre estas.

Propiedad 1.11 Propiedades de la división de polinomios

Sean los polimonios definidos en una variable: $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, divisor, dividendo, cociente y residuo, respectivamente.

1. En toda división el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor
2. En toda división el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor
3. En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del residuo, excepto polinomios que sean homogéneos
4. En toda división el grado máximo del residuo es igual al grado del divisor menos uno, en el caso de división de polinomios homogéneos, no se cumple esta propiedad.

La división algebraica es un procedimiento por medio del cual se establece cuántas veces una expresión está contenida en otra, lo cual se cumple mientras el grado del dividendo sea mayor o igual que el grado del divisor.
Nos centramos ahora en la división de polinomios. Cuando vamos a dividir polinomios se pueden presentar los siguientes casos.

Procedimiento 1.2 –Procedimiento para dividir dos monomios.

1. Dividir los signos mediante la ley de los signos
2. Dividir los coeficientes
3. Dividir los literales o variables aplicando las leyes de los exponentes

De manera general a este proceso se le denomina simplificación.

Ejemplo 1.18 **–División de monomios.**

Efectuar las siguientes divisiones

Ejercicio dado	Simplificar
$\frac{6x^2}{3x}$	$2x$
$\frac{-4x^2y}{3xy}$	$-\frac{4}{3}x$
$\frac{2x^3y^2}{-6x^2y^2}$	$-\frac{1}{3}x$
$\frac{-8x^3y^3}{-8x^2y^2}$	x
$\frac{8a^2b}{4a^2b}$	2

Procedimiento 1.3 –Procedimiento para dividir un polinomio entre un monomio.

1. Representar la división de cada término del dividendo entre el divisor
2. Simplificar como en el caso de la división de dos monomios

Ejemplo 1.19 **–División de un polinomio entre un monomio.**

Efectuar las siguientes divisiones

Ejercicio dado	Expresar cada término del dividendo entre el divisor	Simplificar
$\left(2x^2+4x^3-6x\right)\div x$	$2x^2\div x+4x^3\div x-6x\div x$	$4x^2+2x-6$
$\left(3x^3-6x^2+12x\right)\div\frac{1}{3}x$	$3x^3\div\frac{1}{3}x-6x^2\div\frac{1}{3}x+12x$	$9x^2-18x+36$
$\left(3a^2b+4ab^2\right)\div 3ab$	$3a^2b\div 3ab+4ab^2\div 3ab$	$a+\frac{4b}{3}$
$\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{4}{3}x^2\right)\div\frac{16}{9}x^2$	$\frac{3}{4}x^3\div\frac{16}{9}x^2-\frac{4}{3}x^2\div\frac{16}{9}x^2$	$\frac{27x}{64}-\frac{3}{4}$

Para dividir dos polinomios se emplea un algoritmo que tiene tres pasos, los cuales se repiten hasta que la cantidad divisor no esté contenida en el dividendo.

Procedimiento 1.4 –Procedimiento para dividir dos polinomios.
Se ordenan los polinomios, Generalmente en forma descendente con respecto a una de las variables que tiene el polinomio y se escriben los términos en forma horizontal uno a continuación del otro, luego empleando el signo de la división aritmética se escribe el divisor
Ahora comenzamos con el algoritmo de la división el cual tiene los siguientes tres pasos

1. Dividir el primer término del dividendo entre el primer término el divisor para obtener el primer término del cociente
2. Multiplicar el término del cociente por todo el divisor
3. Restar el resultado anterior del dividendo

Con el siguiente ejemplo mostramos cómo se aplica este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta que el divisor no este contenido en el dividendo

Ejemplo 1.20 **–División de un polinomio entre un monomio.**

Dividir $-9x^4+9x^3-14x^2+8x$ entre $3x^2-2x$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
- & 9x^4 & + & 9x^3 & - & 14x^2 & + & 8x & 3x^2-2x \\ \cline{9-9}
+ & 9x^4 & - & 6x^3 & & & & & -3x^2+x-4 \\ \cline{1-8}
 & 0 & + & 3x^3 & - & 14x^2 & + & 8x & \\
 & & - & 3x^3 & + & 2x^2 & & & \\ \cline{3-8}
 & & & 0 & - & 12x^2 & + & 8x & \\
 & & & & + & 12x^2 & - & 8x & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dividendo: $P(x) = -9x^4 + 9x^3 - 14x^2 + 8$

Divisor: $D(x) = 3x^2 - 2x$

Cociente: $Q(x) = -3x^2 + x - 4$

Residuo: $R(x) = 0$

Es importante realizar las operaciones auxiliares, como parte del proceso de la división.

Operaciones auxiliares	
Términos del Cociente	El resultado se resta del dividendo
$-9x^2 \div 3x^2 = -3x^4$	$-3x^2\left(3x^2-2x\right) = -9x^4+6x^3$
$3x^3 \div 3x^2 = x$	$x\left(3x^2-2x\right) = 3x^3-2x^2$
$-12x^2 \div 3x^2 = -4$	$-4\left(3x^2-2x\right) = -12x^2+8x$

Ejemplo 1.21 **–titulo.**

Dividir $6x^4 - 14x^3 - 8x^2 + 18x + 7$ entre $2x - 2$

$$
\begin{array}{cccccccccc|l}
+ & 6x^4 & - & 14x^3 & - & 8x^2 & + & 18x & + & 7 & 2x-2 \\ \cline{11-11}
- & 6x^4 & + & 6x^3 & & & & & & & 3x^3-4x^2-8x+1 \\ \cline{1-10}
 & 0 & - & 8x^3 & - & 8x^2 & + & 18x & + & 7 & \\
 & & + & 8x^3 & - & 8x^2 & & & & & \\ \cline{3-10}
 & & & 0 & - & 16x^2 & + & 18x & + & 7 & \\
 & & & & + & 16x & - & 16x & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & 0 & + & 2x & + & 7 & \\
 & & & & & & - & 2x & + & 2 & \\ \cline{7-10}
 & & & & & & & & & 9 &
\end{array}
$$

Dividendo: $P(x) = 6x^4 - 14x^3 - 8x^2 + 18x + 7$

Divisor: $D(x) = 2x - 2$

Cociente: $Q(x) = 3x^3 - 4x^2 - 8x + 1$

Residuo: $R(x) = 9$

Operaciones auxiliares	
Términos del Cociente	El resultado se resta del dividendo
$6x^4 \div 2x = 3x^3$	$3x^3\,(2x-2) = 6x^4 - 6x^3$
$-8x^3 \div 2x = -4x^2$	$-4x^2\,(2x-2) = -8x^3 + 8x^2$
$-16x^2 \div 2x = -8x$	$-8x\,(2x-2) = -16x + 16$
$2x \div 2x = 1$	$1\,(2x-2) = 2x - 2$

La división sintética o regla de ruffini

La división sintética o regla de ruffini, es un método que se utiliza para cuando se desean dividir polinomios entre divisores que son un binomio de primer grado. Según la forma del divisor se procede como se indica en los siguientes procedimientos.

Procedimiento 1.5 –Cómo dividir un polinomio entre un binomio de la forma $(x \pm b)$.

1. Se escriben los coeficientes del dividendo en forma horizontal completando previamente si fuera necesario con ceros las potencias que no aparezcan en el dividendo
2. Se escribe el término independiente del divisor cambiándole su signo en un lugar a la izquierda y en la misma línea del dividendo
3. El primer término del cociente es igual al primer término del dividendo, el cual se escribe en una nueva línea y a continuación se multiplica este término por el término del divisor, escribiendo el resultado abajo del segundo término del divisor. Luego se operan los coeficientes de la segunda columna y se coloca este resultado en la parte inferior, este valor es el siguiente término del cociente.
4. Se repite este procedimiento hasta terminar con el último coeficiente del dividendo.
5. El último coeficiente que queda en la línea de abajo corresponde al coeficiente del residuo y los demás corresponden a los coeficientes del cociente el cual tiene grado una unidad menor que el dividendo

Ejemplo 1.22 –División sintética.

Dividir $6x^3 - 8x^2 + 3x - 4$ entre $x - 2$

Potencias de x

x^3		x^2		x		Cte.	
6	$-$	8	$+$	3	$-$	4	$+2$
	$+$	12	$+$	8	$+$	22	
6	$+$	4	$+$	11	$+$	18	

Dividendo: $P(x) = 6x^3 - 8x^2 + 3x - 4$
Divisor: $D(x) = x - 2$
Cociente: $Q(x) = 6x^2 + 4x + 11$
Residuo: $R(x) = 18$

Ejemplo 1.23 –División de polinomios.

Dividir $-3x^5 - 9x^4 + 5x^2 + 17x + 14$ entre $x + 3$

Potencias de x

x^5		x^4		x^3		x^2		x		Cte.	
-3	$-$	9	$+$	0	$+$	5	$+$	17	$+$	14	-3
	$+$	9	$+$	0	$+$	0	$-$	15	$-$	6	
-3	$+$	0	$+$	0	$+$	5	$+$	2	$+$	9	

Dividendo: $P(x) = -3x^5 - 9x^4 + 5x^2 + 17x + 14$
Divisor: $D(x) = x + 3$
Cociente: $Q(x) = 3x^4 + 5x + 2$
Residuo: $R(x) = 9$

Procedimiento 1.6 –Cómo dividir un polinomio entre un binomio de la forma $(ax \pm b)$.

1. Se transforma el divisor en un binomio de la forma $\left(x \pm \dfrac{b}{a}\right)$
2. Se hace la división como en el caso anterior tomando como divisor a $\pm\dfrac{b}{a}$
3. Los coeficientes del cociente se deben dividir entre el coeficiente a. El residuo no se altera

Ejemplo 1.24 –División sintética.

Dividir $12x^4 + 18x^3 + 8x^2 + 16x + 15$ entre $2x + 3$
Primero se transforma el divisor en un binomio de la forma $x + \frac{3}{2}$ y se procede a usar la división sintética empleando $-\frac{3}{2}$

Potencias de x

x^4		x^3		x^2		$x.$		Cte.	
12	+	18	+	8	+	16	+	15	$-\frac{3}{2}$
	−	18	+	0	−	12	−	6	
12	+	0	+	8	+	4	+	9	

Dividendo: $P(x) = 12x^4 + 18x^3 + 8x^2 + 16x + 15$
Divisor: $D(x) = 2x + 3$
Cociente: $Q(x) = 6x^3 + 4x + 2$
Residuo: $R(x) = 9$

Note que para obtener como cociente $6x^3 + 4x + 2$, los coeficientes 12, 8 y 4 se dividen por 2.

Teorema del residuo

Es un procedimiento por medio del cual se halla el residuo de una división sin la necesidad de hacer el algoritmo de la división o un procedimiento de división sintética.

Propiedad 1.12 Teorema del residuo
El residuo de dividir un polinomio en x racional y entero, entre un binomio de la forma $ax \pm b$, se obtiene al evaluar el polinomio cuando x se sustituye por $\pm b/a$.

Ejemplo 1.25 –Uso del teorema del residuo.

Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x - 10$ por $x + 3$

Se evalúa el polinomio $P(x)$ en $x = -3$, es decir $P(-3) = 3(-3)^4 - 5(-3)^3 + 4(-3) - 10$. Al efectuar las operaciones indicadas y simplificar se obtiene 356, que es el valor del residuo de la división.

Ejemplo 1.26 –Uso del teorema del residuo.

Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ por $D(x)$

$P(x)$	$D(x)$	Evaluar con	Operar y simplificar	Residuo
$2x^3 - 3x^2 - 5$	$x + 1$	$x = -1$	$2(-1) - 3(-1)^2 - 5$	-10
$\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6}$	$2x - 1$	$x = \frac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$
$\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 - \sqrt{8}$	$2x + \sqrt{2}$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \sqrt{8}$	$\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{2}}$
$\dfrac{1}{\pi}x^2 - \dfrac{1}{\pi^2}x^3 - \pi$	$x - \pi$	$x = \pi$	$\dfrac{1}{\pi}\left(\pi^2\right) - \dfrac{1}{\pi^2}\left(\pi^3\right) - \pi$	$-\pi$

Teorema del factor

Propiedad 1.13 Teorema del factor
$(x-a)$ es un factor del polinomio $P(x)$, sí y solamente si el polinomio $P(x)$ evaluado en a tiene como residuo 0.

Ejemplo 1.27 –Teorema del factor.

La expresión $(x+2)$ es un factor del polinomio $x^5+2x^4-3x^3-2x^2+5x-6$, ya que al evaluarlo en $x=-2$ se obtiene como residuo 0

Estos dos teoremas en conjunción con la división sintética, se usan a menudo para encontrar la factorización de polinomios cuyo grado es mayor de 2, o que por su complejidad no es sencilla su solución por alguna de las técnicas de factorización.

2 Factorización

La factorización es una operación que tiene como finalidad transformar una expresión algebraica racional y entera, en otra equivalente qué es el producto de factores primos racionales y enteros. Cuando se va a factorizar una expresión algebraica es absolutamente necesario hacer una clasificación de ella según su grado y cantidad de términos, ya que la factorización o técnica que se emplea para expresarla como producto de factores primos, depende de su forma algebraica.
Repasamos ahora el concepto de mcd, el cual se vió en aritmética y se extiende a las expresiones algebraicas.

Propiedad 2.1 Máximo común divisor
El mcd, máximo común divisor de dos o más expresiones enteras es la mayor expresión entera que las divide exactamente

Ejemplo 2.1 –Cálculo del mcd entre expresiones algebraicas.

Calcular el mcd de las expresiones $12x^3$; $8x^2y$; $4x^6z$

El mcd es $4x^2$, ya que se forma con los factores comunes, afectado con el más grande exponente presente en todos ellos.

2.1 MCD y su aplicación en el cálculo de factor común

La primera técnica de factorización es el factor común a dos o más términos, el cual es el mcd de los términos que componen el polinomio.

Procedimiento 2.1 –Factorizar usando el factor común a varios términos

1. Se halla el mcd de los términos que conforman el polinomio. Éste es el factor común del polinomio.
2. Se divide terminó a término entre el mcd, y los correspondientes cocientes son los términos que multiplican al mcd o factor común.

Ejemplo 2.2 –Factorizar usando el mcd.

Factorizar la expresión $3x^3y^2+4x^2y-5xy$.
Se calcula el mcd de los términos que conforman la expresión: xy
Se divide cada uno de los términos por el mcd: $\frac{3x^3y^2}{xy}=3x^2y$, $\frac{4x^2y}{xy}=4x$, $\frac{5xy}{xy}=5$
La factorización es el producto del mcd por las expresiones anteriores: $xy\left(3x^2y+4x-5\right)$

Ejemplo 2.3 –Factorizar usando el mcd.

Factorizar cada una de las expresiones.

Expresión	mcd	calculos auxiliares			Factorización
$3x^2y^3-6x^2y^2+3xy^2z$	$3xy^2$	$\frac{3x^2y^3}{3xy^2}=xy$	$\frac{6x^2y^2}{3xy^2}=2x$	$\frac{3xy^2z}{3xy^2}=z$	$3xy^2\left(xy-2x+z\right)$
$-2a^3b-2ab^3-6ab$	$2ab$	$\frac{2a^3b}{2ab}=a^2$	$\frac{2ab^3}{2ab}=b^2$	$\frac{6ab}{2ab}=3$	$-2ab\left(a^2+b^2+3\right)$
$\sqrt{2}xa^3+\sqrt{2}xb^3+\sqrt{2}xe$	$\sqrt{2}x$	$\frac{\sqrt{2}xa^3}{\sqrt{2}x}=a^3$	$\frac{\sqrt{2}xb^3}{\sqrt{2}x}=b^3$	$\frac{\sqrt{2}xe}{\sqrt{2}x}=e$	$\sqrt{2}x\left(a^3+b^3+e\right)$
$cos(\theta)+x^2cos(\theta)$	$\cos\theta$	$\frac{\cos\theta}{\cos\theta}=1$	$\frac{x^2\cos\theta}{\cos\theta}=x^2$		$\cos\theta\left(1+x^2\right)$

En los calculos auxiliares no se emplean los signos, sin embargo, en el segundo ejercicio se tomó el factor común con signo menos y en los otros de los ejemplos los signos se tuvieron en cuenta el resultado final. En los ejercicios tres y cuatro se factorizaron expresiones que no son enteras, ilustrando que hay una gran variedad de expresiones como estas que se pueden factorizar empleando esta técnica.
Hay polinomios que no cuentan con un factor común a todos sus términos, sin embargo si se hace una agrupación conveniente de los términos, se puede lograr una factorización.

Procedimiento 2.2 –Factorizar usando el factor común por agrupación de términos

1. Agrupar de a dos los términos del polinomio.
2. Buscar el factor común a los términos que han quedado en cada paréntesis o agrupación
3. Identifíquese el paréntesis que quedó como factor común de la expresión resultante en el pasó 2, de no ser así, hay que ensayar con una agrupación diferente

Ejemplo 2.4 –Factorizar usando el mcd por agrupación de términos.

Factorizar la expresión $ax+ay+bx+by$.

Agrupación UNO	Agrupación DOS	Agrupación TRES
$\left(ax+ay\right)+\left(bx+by\right)$	$\left(ax+bx\right)+\left(ay+by\right)$	$\left(ax+by\right)+\left(ay+bx\right)$
$a(x+y)+b(x+y)$	$x(a+b)+y(a+b)$	No hay factor posible
$\left(x+y\right)\left(a+b\right)$	$\left(a+b\right)\left(x+y\right)$	

El paso uno del procedimiento indica que hay que agrupar de a dos términos, el ejemplo muestra que *sólo* hay tres maneras de agrupar los cuatro términos del polinomio a factorar, notemos que el orden en que se expresan las dos factorizaciones, permiten argumentar por qué dos de las agrupaciones de los términos deben conducir a la solución en la mayoría de los casos, en todo caso lo que se quiere resaltar en este punto es que la cantidad de formas en que se puede agrupar no es ilimitado y el lector debe ensayar todas las formas en un mismo ejercicio para obtener la práctica necesaria.

Ejemplo 2.5 –Factorizar usando el mcd por agrupación de términos.

Factorizar las expresiones.

Ejercicio dado	Agrupación	Factor común	Factor común
$15xy+6x+20y+8$	$(15xy+6y)+(20y+10)$	$3x(5y+2)+4(5y+2)$	$(3x+4)(5y+2)$
$4ax-3a-8x+6$	$(4ax-8x)-(3a-6)$	$4x(a-2)-3(a-2)$	$(4x-3)(a-2)$
$\frac{a^2y}{2}+aby+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$	$\left(\frac{a}{4}+\frac{a^2y}{2}\right)+\left(\frac{b}{2}+aby\right)$	$\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}+ay\right)+b\left(\frac{1}{2}+ay\right)$	$\left(\frac{1}{2}a+b\right)\left(\frac{1}{2}+ay\right)$
$a\cos\theta+a+r\cos\theta+r$	$(r\cos\theta+a\cos\theta)+(r+a)$	$\cos\theta(r+a)+(r+a)$	$(\cos\theta+1)(r+a)$

La factorización y multiplicación en el álgebra son dos operaciones o procedimientos inversos. Para explicarlo en unos términos coloquiales, plantearemos la siguiente analogía. Supóngase que la factorización y la multiplicación son los extremos de un puente. Cuando se cruza el puente de un sentido a otro se está factorizando o multiplicando, según la dirección que se tomó.
En ese orden de ideas, la técnica que continúa se basa en las fórmulas de productos notables que se estudiaron con anterioridad. A esta técnica le daremos el nombre de fórmulas de factorización.
Las fórmulas en matemáticas, son expresiones que se deben comprender y con las cuales hay que aprender a operar. Ellas proporcionan las indicaciones necesarias y suficientes que el estudiante debe conocer a fin de emplearlas en distintos procesos. Es por esto por lo que se presenta una manera de trabajar con las fórmulas en general.
Un error que los estudiantes cometen al usar formulas, tiene que ver con la confusión que se genera cuando van a escribir los signos propios de la fórmula y los signos que tienen las expresiones con las cuales se está evaluando el enunciado en sí. Para evitar estas confusiones, damos como procedimiento lo siguiente. Escribir la fórmula, reemplazando la variable o variables que ella tiene con paréntesis. Posteriormente reemplazar entre estos paréntesis con las cantidades que corresponde según el caso.
Los ejemplos que se presentan en cada una de las sucesivas fórmulas de factorización, aclaran este proceso.

2.2 Fórmulas para la factorización de Binomios

Propiedad 2.2 Factorización de una Diferencia de cuadrados

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

Ejemplo 2.6 –Factorizar usando la fórmula de Diferencia de dos cuadrados.

Factorizar $16x^2-9y^2$

Identificar que $A^2=16x^2 \Rightarrow A=4x$ y $B^2=9y^2 \Rightarrow B=3y$
Aplicacndo la fórmula de factorización se obtiene $(4x+3y)(4x-3y)$

Ejemplo 2.7 –Factorizar usando la fórmula de Diferencia de dos cuadrados.

Ejercicio dado	Identificar $\sqrt{A^2}$	$\sqrt{B^2}$	Aplicar Fórmula $(A-B)(A+B)$
$\frac{x^2}{4}-y^2$	$\frac{x}{2}$	y	$\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)$
$a^2b^4-\frac{x^2}{9}$	ab^2	$\frac{x}{3}$	$\left(ab^2-\frac{x}{3}\right)\left(ab^2+\frac{x}{3}\right)$
$\cos^2\theta-a^2$	$\cos\theta$	a	$(\cos\theta-a)(\cos\theta+a)$

Propiedad 2.3
Factorización de una Suma de cubos

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

Ejemplo 2.8 –Factorizar usando suma de cubos.

Ejercicio dado	Identificar A	B	Aplicar Fórmula $(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)$
a^3+27x^3	a	$3x$	$(a+3x)(a^2-3ax+9x^2)$
x^3y^6+27	xy^2	3	$(xy+3)(x^2y^2-3xy+9)$
$a^3b^6+\frac{1}{8}$	ab^2	$\frac{1}{2}$	$\left(ab^2+\frac{1}{2}\right)\left(a^2b^4-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{4}\right)$

Propiedad 2.4
Factorización de una Diferencia de cubos

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

Ejemplo 2.9 –Factorizar usando diferencia de cubos.

Ejercicio dado	Identificar A	B	Aplicar Fórmula $(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$
b^3c^6-64	bc^2	4	$(bc^2-4)(b^2c^4+4bc^2+16)$
$27a^6b^3-8$	$3a^2b$	2	$(3a^2b-2)(9a^4b^2+6a^2b+4)$
$\cos^3\theta-1$	$\cos\theta$	1	$(\cos\theta-1)\left(\cos^2\theta+\cos\theta+1\right)$

2.3 Factorización de trinomios de tipo cuadrático

Esquema de casos de factorización

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

La multiplicación y factorización son procesos inversos; los procedimientos para factorizar tienen una estrecha relación con los productos notables o identidades ya explicadas en el capítulo anterior. La siguiente técnica se comprende mejor, si tomamos como referencia el producto notable $(x+B)(x+D) = x^2 + (D+B)x + BD$.

Procedimiento 2.3 –Cómo factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

1. Calcular los divisores del coeficiente c.
2. Establecer los divisores B y D de c, tales que su producto es c y la suma sea b

Al estudiar el procedimiento, se encuentra que los divisores de c buscados son B y D, esta pareja de números multiplicada da como resultado c y operada b.

Ejemplo 2.10 –**Factorizando un trinomio de la forma** $x^2 + bx + c$.

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$$

Los divisores son $B = 4$ y $D = 1$, ya que $(4)(1) = 4$ y $(4) + (1) = 5$

Ejemplo 2.11 –**Factorizando un trinomio de la forma** $x^2 + bx + c$.

Ejercicio dado	BD es c	$B + D$ es b	La factorización es
$x^2 + x - 12$	$(4)(-3) = -12$	$(4) + (-3) = 1$	$(x+4)(x-3)$
$x^2 - 8x + 15$	$(-5)(-3) = 15$	$(-5) + (-3) = -8$	$(x-5)(x-3)$
$a^2 + 4a - 21$	$(-3)(7) = -21$	$(-3) + (7) = 4$	$(a-3)(a+7)$
$x^2 + 3xy - 4y^2$	$(-1)(4) = -4$	$(-1) + (4) = 3$	$(x-y)(x+4y)$

Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Procedimiento 2.4 –Cómo factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

1. Multiplicar y dividir por el coeficiente a y expresar el trinomio así: $\dfrac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$
2. Calcular los divisores del producto ac.
3. Establecer los divisores B y D de ac, tales que su producto es ac y la suma sea b
4. Se factoriza y simplifica así: $\dfrac{a(x+B)(x+D)}{a} = (x+B)(x+D)$

Siempre que la factorización del trinomios tenga coeficientes enteros, entonces será posible simplificar la expresión por a.

Ejemplo 2.12 –Factorizando un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

Ejercicio dado $2x^2+5x+3$

Multiplicar y dividir por 2	$\dfrac{(2x)^2+5(2x)+6}{2}$
Los divisores de $ac=6$, son 3 y 2	$\dfrac{(2x+3)(2x+2)}{2}$
Factor común 2, en el segundo factor	$\dfrac{2(2x+3)(x+1)}{2}$
Se simplifica por 2	$(2x+3)(x+1)$

En el trinomio $(2x)^2+5(2x)+6$, *interpretamos* que el coeficiente b, del término en x, es 5, y el término constante es 6. Con base en estos valores se buscan los números B y D, que para el ejercicio fueron 3 y 2.

Ejemplo 2.13 –Factorizando un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

Ejercicio	Mult. y div. por a	Divisores B	D	Factorización	Factor común	Simplificar
$3x^2-10x-8$	$\dfrac{(3x)^2-10(3x)-24}{3}$	2	-12	$\dfrac{(3x+2)(3x-12)}{3}$	$\dfrac{(3x+2)3(x-4)}{3}$	$(3x+2)(x-4)$
$4x^2-11x+6$	$\dfrac{(4x)^2-11(4x)+24}{4}$	-3	-8	$\dfrac{(4x-3)(4x-8)}{4}$	$\dfrac{(4x-3)4(x-2)}{4}$	$(4x-3)(x-2)$
$10x^2+x-2$	$\dfrac{(10x)^2+(10x)-20}{10}$	5	-4	$\dfrac{(10x+5)(10x-4)}{10}$	$\dfrac{5(2x+1)2(5x-2)}{10}$	$(2x+1)(5x-2)$

Trinomio cuadrado perfecto, TCP

De los productos notables para el cuadrado de la suma o diferencia de un binomio, se obtiene como resultado un trinomio que recibe el nombre de trinomio cuadrado perfecto, es decir al calcular $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, la expresión $A^2+2AB+B^2$ se llama TCP.

Procedimiento 2.5 –Cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto, TCP.

1. Identificar que:
   a) Los términos de los extremos, deben tener raíz cuadrada exacta.
   b) El término del medio, debe ser el producto de las raíces cuadradas de los extremos, multiplicadas por dos.
2. La factorización es:
   a) Un binomio que es la suma o diferencia de las raíces cuadradas de los extremos, elevado al cuadrado.
   b) El signo lo determina el término central del trinomio.

Ejemplo 2.14 –Factorizando un trinomio cuadrado perfecto.

1. Identificar si es un TCP

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & 6x & + & 9 \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \sqrt{x^2}=x & & & & \sqrt{9}=3 \end{array}$$

El termino del medio es $2(x)(3)=6x$

Se cumplen las dos condiciones del procedimiento, por tanto se factoriza como un TCP, obteniendo: $(x+3)^2$

El signo entre los dos términos de la factorización, es positivo, porque el término de en medio en el trinomio dado, es positivo.
Los ejercicios del siguiente ejemplo son TCP y por tanto, debemos entender que nos están hablando de una expresión de la forma $A^2+2AB+B^2$.

Ejemplo 2.15 –Factorizando un trinomio cuadrado perfecto.

	Comprobar si es TCP			Factorizar
Ejercicio dado	$\sqrt{A^2}=A$	$\sqrt{B^2}=B$	$2AB$	$(A\pm B)^2$
$4x^2+12xy+9y^2$	$\sqrt{4x^2}=2x$	$\sqrt{9y^2}=3y$	$12xy$	$\left(2x+3y\right)^2$
$9a^2b^2-24abc+16c^2$	$\sqrt{9a^2b^2}=3ab$	$\sqrt{16c^2}=4c$	$24abc$	$(3ab-4c)^2$
$\frac{y^2}{4}+3y+9$	$\sqrt{\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{2}y$	$\sqrt{9}=3$	$3y$	$\left(\frac{1}{2}y+3\right)^2$
$\cos^2\theta-6cos\theta+9$	$\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$	$\sqrt{9}=2$	$6cos\theta$	$(\cos\theta-3)^2$

Trinomio cuadrado por completación

La completación de trinomios a TCP es un procedimiento que se emplea con mucha frecuencia en Geometría Analítica y Cálculo, independientemente de si la expresión dada queda factorizada o no. Explicamos el proceso independientemente de cuál sea el objetivo en un determinado ejercicio.

Procedimiento 2.6 –Completar un trinomio a un TCP por adición y sustracción

1. Factorizar por el coeficiente principal del trinomio a, cuando este es diferente de 1.
2. Calcular $2AB$, es decir, establecer cuál debe ser el termino del medio para que el trinomio dado se un TCP.
3. Sumar y restar una cantidad tal que se tenga $2AB$.
4. Factorizar como un TCP.
5. En algunos casos es posible que la expresión se pueda factorizar aún más.

Al hablar de trinomio nos referimos a ax^2+bx+c y $A^2+2AB+B^2$ cuando es un TCP, pero, en general en álgebra se clasifican expresiones como trinomios de tipo cuadrático, cuando el grado es $2n$ y el exponente del término del medio es n, para algún entero positivo n.

Ejemplo 2.16 –Factorizando un trinomio por adición y sustracción.

El trinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ es de tipo cuadrático, y no puede ser factorizado por los métodos anteriores, pero $A = x^2$ y $B = y^2$, así que sumando y restando x^2y^2 se obtiene $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$, lo cual se factoriza de la siguiente forma.

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$	Ejercicio dado
$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$	Agrupación de términos
$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$	Factorizando el TCP
$[(x^2 + y^2) - xy]\,[(x^2 + y^2) + xy]$	Factorizando como una difrencia de cuadrados

La expresión $x^4 + x^2y^2 + y^4$ se ha factorizado como $(x^2 - xy + y^2)(x + xy + y^2)$

Notemos que las expresiones en los paréntesis son trinomios de tipo cuadrático y por tanto podemos aplicar el procedimiento de completación de TCP, aunque la expresión obtenida no va a ser una factorización.

Ejemplo 2.17 –Completando un trinomio a TCP.

El trinomio $x^2 - xy + y^2$ es de tipo cuadrático y si se suma y resta xy se obtiene $x^2 - 2xy + y^2 + xy$ lo cual se *factoriza* así.

$x^2 - 2xy + y^2 + xy$	Ejercicio dado
$(x^2 - 2xy + y^2) + xy$	Agrupación de términos
$(x + y)^2 + xy$	Factorizando el TCP

Pero podemos notar que la expresión $(x + y)^2 + xy$, *no es una factorización*, debido a que es la suma de dos expresiones.

En el ejercicio se pudo haber sumado y restado $2xy$ para obtener $x^2 + 2xy + y^2 - 3xy$, y luego llegar a $(x + y)^2 - 3xy$. Sólo la práctica y el contexto determinan cuál es el proceso más adecuado de completación de un trinomio a TCP.

Procedimiento 2.7 –Completando un trinomio a TCP.

$3x^2 + 6x + 2$	Ejercicio dado
$3(x^2 + 2x) + 2$	Agrupar los términos de x y factorizar por el coeficiente principal del trinomio 3
$3[(x^2 + 2x + 1) - 1] + 2$	Completar el TCP
$3[(x + 1)^2 - 1] + 2$	Factorizar el TCP
$3(x + 1)^2 - 3 + 2$	Ley distributiva
$3(x + 1)^2 - 1$	Simplificación

El ejemplo precedente, ilustra otra forma de completación de trinomios a TCP.

Esquema de tanteo general

Procedimiento 2.8 –Método de tanteo en cruz para trinomio de tipo cuadrático.

1. Expresar el primer término del trinomio como producto de dos de sus divisores.
2. Expresar el último término del trinomio como producto de dos de sus divisores.
3. El término de la mitad del trinomio debe ser igual a la suma de los productos de los términos que indica la cruz.

Ejemplo 2.18 **–Factorizando un trinomio por tanteo general.**

$$\begin{array}{lll}
3x^2 \quad + \quad 5x \quad + & 2 & \\
3x & 2 = (x)(2) & = 2x \\
x & 1 = (3x)(1) & = 3x \\
 & & = 5x
\end{array}$$

Los factores que componen la respuesta son $(3x+2)(x+1)$

En el proceso de tanteo o cálculo de los divisores, hay que determinar los signos adecuados a fin de que se cumplan las condiciones del procedimiento.

Ejemplo 2.19 **–Factorizando un trinomio por tanteo general.**

$$\begin{array}{lll}
4x^2y^2 \quad - \quad xy \quad - & 3 & \\
4xy & +3 & = 3xy \\
xy & -1 & = -4xy \\
 & & = -xy
\end{array}$$

Los factores que componen la respuesta son $\left(4xy+3\right)\left(xy-1\right)$

Usando la formula general

Propiedad 2.5 Fórmula general
Sea la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, las raíces están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Según el teorema del factor, si $x=c$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $(x-c)$ es un factor. Esta propiedad nos permite obtener los factores del trinomio.

Procedimiento 2.9 –Cómo factorizar un trinomio empleando la fórmula General.

1. Aplicar la fórmula General.

2. si r_1 y r_2 son las raices del trinomio, entonces sus factores son $(x-r_1)$ y $(x-r_2)$

Ejemplo 2.20 **–Factorizando un trinomio empleando la formula General.**

En primer lugar identificamos los coeficientes del trinomio: $8x^2-22x-21$: $a=8$, $b=-22$ y $c=-21$.

Con ellos se reempaza en la fórmula General $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\dfrac{-(-22)\pm\sqrt{(-22)^2-4(8)(-21)}}{2(8)}=\dfrac{22\pm\sqrt{484+672}}{16}=\dfrac{22\pm 34}{16}$ por lo tanto

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{56}{16}=\dfrac{7}{2} \\ \\ r_2=\dfrac{-12}{16}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Para determinar los factores del trinomio partimos del hecho que $x_1=\dfrac{7}{2}\Rightarrow 2x_1=7\Rightarrow 2x_1-7=0$, con lo cual uno de los factores es $(2x-7)$.
Aplicando un procedimiento similar con la segunda solución, se puede concluir que la factorización es $(2x-7)(4x+3)$

Empleando de forma estricta el paso dos del procedimiento se obtiene $\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)=0$, esta expresión al ser una ecuación se puede multiplicar por cualquier número real, convenientemente por 8 de la siguiente forma $2\left(x-\frac{7}{2}\right)4\left(x+\frac{3}{4}\right)=0\cdot 8$ que es equivalente a $(2x-7)(4x+3)=0$, luego de aplicar distributiva. Lo anterior con el objeto de presentar la factorización con coeficientes enteros, siempre que sea posible.

Ejemplo 2.21 **–Factorizando un trinomio empleando la formula General.**

Ejercicio	Identificar a	b	c	Raíces r_1	r_2	Factorización
$x^2-6x-16$	1	-6	-16	-2	8	$(x+2)(x-8)$
$x^2+xy-12y^2$	1	1	-12	3	-4	$(x-3y)(x+4y)$
$6x^2+x-35$	6	1	-35	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$(2x+5)(3x-7)$
$x^2+(3-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}$	1	$3-\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-3	$(x-\sqrt{2})(x+3)$
$-3a^2+8a+60$	-3	8	60	6	$-\frac{10}{3}$	$(-a+6)(3a+10)$

3 Fracciones

Definición 3.1 Definición fracción algebraica

Es una expresión algebraica en la que su numerador o denominador contiene por lo menos una variable

Dos o más fracciones algebraicas se pueden sumar, restar multiplicar y dividir.

Procedimiento 3.1 –Simplificación de fracciones algebraicas a su mínima expresión
Es un procedimiento por medio del cual se reduce la fracción recurriendo a la cancelación de factores comunes al numerador y denominador.
Para simplificar una fracción algebraica suele ser necesario factorizar su numerador y denominador.

Ejemplo 3.1 –Simplificando una fracción.

Fracción dada	Fracción simplificada
$\frac{3x^2}{9x}$	$\frac{x}{3}$
$\frac{(x+1)\,x}{x}$	$(x+1)$
$\frac{(x+1)\,x}{(x+1)}$	x
$\frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{x}y^2}$	$\frac{1}{y}$
$\frac{\cos\theta+1}{1+\cos\theta}$	1

3.1 Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para efectuar la multiplicación o división indicada de dos fracciones, se aplica la siguiente propiedad.

Propiedad 3.1 Multiplicación y/o división de fracciones.
Dadas las fracciones $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{D}$.

1. La Multiplicación $\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}$ se calcula como $\dfrac{AC}{BD}$
2. La División $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}$ es $\dfrac{AD}{BC}$

Ejemplo 3.2 –Operando fracciones.

Ejercicio dado	Aplicando la propiedad	Simplificando
$\dfrac{xy^2}{x^2}\cdot\dfrac{3y^2}{4x}$	$\dfrac{xy^2\cdot 3y^2}{x^2\cdot 4x}$	$\dfrac{3y^4}{4x^2}$
$\dfrac{a^2b}{c}\div\dfrac{a}{c}$	$\dfrac{a^2b\cdot c}{c\cdot a}$	ab
$\dfrac{x}{(x-y)}\cdot\dfrac{(x-y)}{x^3}$	$\dfrac{x(x-y)}{x^3(x-y)}$	$\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{\cos^2\theta}{\theta}\div\dfrac{\theta^2}{\cos\theta}$	$\dfrac{\cos^2\theta\cdot\cos\theta}{\theta\cdot\theta^2}$	$\dfrac{\cos^3\theta}{\theta^3}$

Hay ejercicios en los cuales es necesario factorizar para simplificar luego de operar fracciones.

Ejemplo 3.3 –Operando y empleando factorización para simplificar fracciones.

Ejercicio dado	Aplicando la propiedad	Factorizando	Simplificando
$\dfrac{x-7}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x-2}$	$\dfrac{(x-7)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(3x-21)}$,	$\dfrac{(x-7)(x-1)(x+1)}{3(x-1)(x-7)}$	$\dfrac{x+1}{3}$
$\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9}\div\dfrac{x-4}{x+3}$	$\dfrac{\left(x^2-2x-8\right)(x+3)}{\left(x^2-9\right)(x-4)}$	$\dfrac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x-4)}$	$\dfrac{x+2}{x-3}$
$\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\dfrac{x-5}{x+3}$	$\dfrac{\left(x^2-9\right)(x-5)}{\left(x^2-6x+5\right)(x+3)}$	$\dfrac{(x-3)(x+3)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+3)}$	$\dfrac{x-3}{x-1}$
$\dfrac{7}{x^2-4}\div\dfrac{xy}{x-2}$	$\dfrac{7(x-2)}{xy\left(x^2-4\right)}$	$\dfrac{7(x-2)}{xy(x-2)(x+2)}$	$\dfrac{7}{xy(x+2)}$

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Es un procedimiento necesario para poder reducir dos o más fracciones a una sola fracción equivalente.
Para calcular el mínimo común múltiplo entre dos o más expresiones algebraicas se debe aplicar el siguiente procedimiento

Procedimiento 3.2 –Cálculo del mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.

1. Factorizar todos y cada uno de los polinomios dados
2. Determinar los factores repetidos y no repetidos con su mayor exponente.
   Este será el mínimo común múltiplo

Para el caso de monomios, aplicamos únicamente el paso dos del procedimiento.

Ejemplo 3.4 –Cálculo del MCM de monomios.

Ejercicio dado	MCM
$\{3a^2b; 12ab^2\}$	$3ab$
$\{24x^2y^3; 12x^2y^2\}$	$12x^2y^2$
$\{-10x^2y^4; -20x^2y^6\}$	$10x^2y^4$

Ejemplo de ejercicios en los cuales hay que factorizar antes del calcular el MCM

Ejemplo 3.5 –Cálculo del MCM de polinomios.

Ejercicio dado	Fcatorizando	MCM
$(x^2-4); (x^2+4x+4)$	$(x-2)(x+2); (x+2)^2$	$(x-2)(x+2)^2$
$(4x^2-4); (x^2-2x+1)$	$4(x-1)(x+1); (x-1)^2$	$4(x+1)(x-1)^2$
$(x^2+x-6); (x^2+4x+3)$	$(x+3)(x-2); (x+3)(x+1)$	$(x+3)(x-2)(x+1)$
$(x^4-x); (2x^4+2x^3+2x^2)$	$x(x-1)(x^2+x+1); 2x^2(x^2+x+1)$	$2x^2(x-1)(x^2+x+1)$

3.2 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

La reducción o combinación de fracciones entre las cuales hay indicada una operación de suma o resta, se hace expresándolas en fracciones equivalentes que tengan un denominador común, es decir, homogéneas.
Cuando se van a sumar o restar fracciones, todas deben tener el mismo denominador, ser homogéneas.

Procedimiento 3.3 –Reducción de fracciones al Mínimo Común Denominador

1. Se calcula el mínimo común múltiplo de las fracciones.
2. Se buscan las fracciones equivalentes con el denominador común.
3. Se suman o restan las fracciones cómo fracciones homogéneas.

El mínimo común múltiplo, el el procedimiento empleado para calcular el mínimo común denominador.
El ejemplo ilustra como reducir fracciones, cuando sus denominadores son monomios.

Ejemplo 3.6 –Reducción de fracciones al MCD con monomios como denominador.

$\frac{1}{4x}+\frac{3}{8x^2}-\frac{5}{4x^3}$		Ejercicio dado
$\text{MCD}\{4x;8x^2;4x^3\}$	$=8x^3$	Cálculo del MCD
$\frac{8x^3}{4x}$	$=2x^2$	El MCD se divide por cada denominador
$\frac{8x^3}{8x^2}$	$=x$	
$\frac{8x^3}{4x^3}$	$=2$	
$\frac{2x^2}{8x^3}+\frac{3x}{8x^3}-\frac{10}{8x^3}$		Multiplicar denominadores y numeradores por los cocientes obtenidos
$\frac{2x^2+3x-10}{8x^3}$		Operar las fracciones homogeneas

Cuando se multiplican denominadores y numeradores por los cocientes obtenidos, estas fracciones son homogéneas, mismo denominador.

Ejemplo 3.7 –Reducción de fracciones al MCD.

$\frac{3}{y-2}-\frac{2}{y+2}-\frac{y}{y^2-4}$		Ejercicio dado
$\text{MCD}\{(y-2);(y+2);(y-2)(y+2)\}$	$=(y-2)(y+2)$	Cálculo del MCD
$\frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)}$	$=(y+2)$	El MCD se divide por cada denominador
$\frac{(y-2)(y+2)}{(y+2)}$	$=(y-2)$	
$\frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y+2)}$	$=1$	
$\frac{3(y+2)}{(y-2)(y+2)}-\frac{2(y-2)}{(y+2)(y-2)}-\frac{y}{(y+2)(y-2)}$		Amplificar las fracciones
$\frac{3y+6-2y+4-y}{(y+2)(y-2)}$		Operar las fracciones homogéneas
$\frac{10}{(y+2)(y-2)}$		Simplificar

Amplificar una fracción, es un proceso que consiste en multiplicar numerador y denominador, por un factor diferente de cero.
En ciertos ejercicios es conveniente hacer un cambio de signo, que permita determinar un MCD más simple.

Ejemplo 3.8 –Reducción de fracciones al MCD con cambio de signo en el denominador.

$5-\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{10}{9-x^2}$	Ejercicio dado
$\dfrac{5}{1}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{10}{x^2-9}$	Cambio de signo
$\{1;\,(x+3);\,(x+3)\,(x-3)\} \quad =(x+3)\,(x-3)$	MCD
$\dfrac{(x+3)\,(x-3)}{1} \quad =(x+3)\,(x-3)$	Dividir el MCD
$\dfrac{(x+3)\,(x-3)}{(x+3)} \quad =(x-3)$	por cada denominador
$\dfrac{(x+3)\,(x-3)}{(x+3)\,(x-3)} \quad =1$	
$\dfrac{5\,(x+3)\,(x-3)}{(x+3)\,(x-3)}-\dfrac{5\,(x-3)}{(x+3)\,(x-3)}+\dfrac{10}{(x+3)\,(x-3)}$	Amplificar las fracciones
$\dfrac{5\left(x^2-9\right)-5\,(x-3)+10}{(x+3)\,(x-3)}=\dfrac{5x^2-45-5x+15+10}{(x+3)\,(x-3)}$	Operar las fracciones homogéneas/Ley distributiva
$\dfrac{5x^2-5x-20}{(x+3)\,(x-3)}$	Reduciendo términos semejantes

3.3 Fracciones continuas y complejas

Una fracción es compleja cuando en su numerador o denominador hay a su vez una fracción.

Para simplificar una fracción compleja a su mínima expresión, es necesario comenzar a realizar las operaciones de adición o multiplicación que estén indicadas entre dos o más fracciones.
Este proceso se ilustra con los siguientes ejemplos.
Este ejemplo muestra como se simplifica una fracción compleja, que es la división de dos fracciones.

Ejemplo 3.9 –División de dos fracciones.

Extremos $\dfrac{\frac{x-y}{xy}}{\frac{x-y}{y}}$ Medios $\Rightarrow$ Producto de Extremos $\dfrac{y\left(x-y\right)}{xy\left(x-y\right)}$ Producto de Medios $\Rightarrow \dfrac{1}{x}$

Ejemplo 3.10 –Simplificación de una fracción compleja.

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$ Ejercicio dado

Cálculos auxiliares

$$x-\frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

$$1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Reemplazamos en el ejercicio dado

$$\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x\,(x-1)\,(x+1)}{x\,(x+1)} = x-1$$

4 Potenciación.

4.1 Potenciación

Definición 4.1 Potenciación

Sean a, b $\mathbb{R}$eales y n un $\mathbb{Z}^+$, se define a^n así

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a ... a}_{n \text{ veces } a} = b$$

a es la base, n el exponente y b la potencia

De la definición se aprecia que la potenciación es una operación definida en términos de una multiplicación. Potencias que resultan con frecuencia.

Vocabulario 4.1 Potencias especiales

1). $a^0 = 1$ Todo número $\mathbb{R}$eal elevado a la cero equivale a 1, con $a \neq 0$

2). $a^1 = a$ Todo número $\mathbb{R}$eal siempre tiene exponente 1

3). $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ a^{-1} es el inverso multiplicativo de a, con $a \neq 0$

4). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\dfrac{b}{a}\right)$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $\left(\dfrac{b}{a}\right)$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

5). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ En general, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$ es el inverso multiplicativo de $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

4.2 Leyes de la Potenciación.

A continuación listaremos las leyes de la potenciación en un orden que obedece al uso que se hace de ellas, en función de su aplicación en la simplificación.

Propiedad 4.1 Potencia de una potencia.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Es la misma base a elevada al producto $m \cdot n$

Ejemplo 4.1 –Cálculo de potencia de una potencia

$(x^2)^4$	Ejercicio dado
$x^{(2)\cdot(4)}$	Aplicamos la propiedad potencia de una potencia
x^8	Efectuamos el producto indicado

Propiedad 4.2 Potencia de un producto

$$(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$$

Es el producto de las bases a por b elevadas cada una al exponente m

Ejemplo 4.2 –Cálculo de potencia de un producto

Calcular $(x\cdot y)^7$

$(x\cdot y)^7$	Ejercicio dado
$x^7\cdot y^7$	Aplicamos la propiedad potencia de un producto

Para efectuar una potenciación, se suelen aplicar varias leyes de forma simultánea, veamos un ejemplo donde se apliquen dos leyes de forma simultánea

Ejemplo 4.3 –Simplificación

Calcular $(x^3\cdot y^{-2})^{-2}$

$(x^3\cdot y^{-2})^{-2}$	Ejercicio dado
$(x^3)^{-2}\cdot(y^{-2})^{-2}$	Aplicamos la propiedad potencia de un producto
$x^{-6}\cdot y^4$	Aplicamos la propiedad potencia de una potencia

Propiedad 4.3 Potencia de un cociente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Es el cociente de las bases a y b con $b\neq 0$ elevadas cada una al exponente m

Ejemplo 4.4 –Simplificación

Calcular $\left(\frac{x}{y}\right)^5$

$\left(\frac{x}{y}\right)^5$ Ejercicio dado

$\frac{x^5}{y^{10}}$ Aplicamos las propiedades potencia de una potencia, de producto y de un cociente

Notemos que las propiedades enunciadas hasta ahora cumplen como función expresar cada base con un único exponente, además, las leyes potencia de un producto y de un cociente se pueden entender como una ley *distributiva* de los exponentes respecto del producto o cociente de potencias.

Propiedad 4.4 Producto de potencias con igual base $\underbrace{a^m \cdot a^n}_{\text{igual base a}} = a^{m+n}$

Es igual a la misma base a elevada a la suma $m+n$

Ejemplo 4.5 –Simplificación

$\left(\frac{x}{y}\right)^5 x^2$ Ejercicio dado

$\frac{x^5 \cdot x^2}{y^5}$ Aplicamos la propiedad potencia de un producto y se multiplican las fracciones

$\frac{x^7}{y^5}$ hemos aplicado la propiedad Producto de potencias con igual base

Simplificar una potenciación consiste en expresar el resultado final en potencias de números primos, de forma que cada base sólo aparezca una vez; como lo presenta el ejemplo, donde se han combinado las bases 2 y 3 en una sola potencia.

Propiedad 4.5 Cociente de potencias con igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Es igual a la misma base a con $a \neq 0$ elevada a la diferencia $m-n$ si $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Es igual a *uno* sobre la misma base a con $a \neq 0$ elevada a la diferencia $n-m$ si $m < n$

4.3 Simplificación de una expresión con exponentes

Ejemplo 4.6 –Simplificación.

$\dfrac{2^2\cdot 7\,(4)^{-4}\,(9)^3\,(3)^2}{2^2\cdot(4)^5\,(9)^4}$	Ejercicio dado
$\dfrac{2^2\cdot 7\left(2^2\right)^{-4}\left(3^2\right)^3(3)^2}{2^2\cdot\left(2^2\right)^5\left(3^2\right)^4}$	Descomponiendo los números 4 y 9
$\dfrac{2^2\cdot 7\left(2^{-8}\right)\left(3^6\right)\left(3^2\right)}{2^2\cdot\left(2^{10}\right)\left(3^8\right)}$	Potencia de una potencia
$2^2\cdot 7\cdot 2^{-8}\cdot 3^6\cdot 3^2\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-10}\cdot 3^{-8}$	Definición de inverso multiplicativo
$2^{2-8-2-10}3^{6+2-8}7$	Producto de potencias con igual base
$2^{-18}3^07$	Efectuando operaciones
$\dfrac{7}{2^{18}}$	Definición de inverso multiplicativo y $3^0=1$

Ejemplo 4.7 –Simplificación.

$\left(\dfrac{4^{-1}6^29^{-2}}{4^26^29^{-3}}\right)^{-4}\div\left(\dfrac{4^{-1}6^39}{4^36^{-1}}\right)^{-1}$	Ejercicio dado
$\left(\dfrac{\left(2^2\right)^{-1}\cancel{6^2}\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^2\right)^2\cancel{6^2}\left(3^2\right)^{-3}}\right)^{-4}\div\left(\dfrac{\left(2^2\right)^{-1}(2\cdot 3)^3\left(3^2\right)}{\left(2^2\right)^3(2\cdot 3)^{-1}}\right)^{-1}$	Descomponer en factores primos
$\dfrac{2^83^{16}}{2^{-16}3^{24}}\cdot\dfrac{2^{-6}\cdot 2\cdot 3}{2^2\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^{-2}}$	Potencia de una potencia, de cociente y producto Dividir por a/b es multiplicar por b/a Se cancelan factores comunes cuando es posible
$\dfrac{2^8\cdot 3^{16}\cdot 2^{-6}\cdot 2\cdot 3}{2^{-16}\cdot 3^{24}\cdot 2^2\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^{-2}}$	Se efectúo la multiplicación
$2^8\cdot 3^{16}\cdot 2^{-6}\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{16}\cdot 3^{24}\cdot 2^{-2}\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 3^2$	Definición de inverso multiplicativo
$2^{20}3^{-2}$	Producto de potencias con igual base
$\dfrac{2^{20}}{3^2}$	Expresando con exponentes positivos

5 Radicación.

5.1 Radicación.

Definición 5.1 Radicación

Sean a, b $\mathbb{R}$eales y n un $\mathbb{Z}^+$, se define $\sqrt[n]{a}$ así

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solamente si } b^n = a$$

a es el radicando, n el índice y b la raíz

Observemos que la radicación es una operación en la que se busca una base b (llamada raíz) tal que al aplicarle el exponente n de como resultado a, es así como la radicación es una potenciación en la que se desconoce la base.

Ejemplo 5.1 –Cálculo de una Raíz con dos soluciones.

Calcular $\sqrt{4}$
Buscamos un número b tal que b^2 sea 4; hay dos opciones para b y son 2 y -2.

Siempre hay forma de verificar si el número hallado cumple con el cálculo realizado, en efecto veamos que $2^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$. La forma de presentar la respuesta puede ser escribiendo $\sqrt{4} = \pm 2$, o se puede formular por separado que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{4} = -2$.

Ejemplo 5.2 –Cálculo de una Raíz con única solución.

Calcular $\sqrt[3]{-8}$
Buscamos un número b tal que b^3 sea -8; hay sólo una opción para b y es -2, es decir $\sqrt[3]{-8} = -2$.

La solución de un raíz puede ser exacta, siempre que el radicando sea una potencia cuadrada o cúbica, como en los dos ejemplos anteriores; pero existen ejercicios de radicación en los cuales el valor de la raíz es un decimal infinito y para su calculo debemos recurrir a dispositivos como calculadoras o computadores.

Ejemplo 5.3 –Cálculo de una Raíz inexacta.

Calcular $\sqrt[2]{5}$
Buscamos un número b de forma que b^2 sea 5; de la potenciación sabemos que $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$, así que la raíz debe ser un número entre 2 y 3, lo cual significa que no es un entero.
El cálculo que se muestra a continuación fue realizado en el sistema en línea Wolfram Alpha.

$$\sqrt[2]{5} = 2{,}2360679774997896964091736687312762354406183596115257242708 97...$$

No se pretende dejar la idea que una raíz es inexacta cuando su solución no es entera, así por ejemplo $\sqrt{\frac{1}{4}}$ es $\frac{1}{2}$, que es un valor exacto y no es un entero, pero tampoco es una aproximación como la raíz calculada en el ejemplo anterior.

En Matemáticas se privilegia la exactitud en los cálculos sobre las aproximaciones, motivo por el cual todas las raíces inexactas se operan en su forma más simple y sólo se recurre a una aproximación de ellas en casos muy especiales de las aplicaciones en la solución de problemas.

Ejemplo 5.4 –Cálculo de una Raíz sin solución Real.

Calcular $\sqrt{-4}$
Buscamos un número b tal que b^2 sea -4; habría dos opciones para b y son 2 y -2, sin embargo, notemos que tanto 2^2 como $(-2)^2$ no es -4 sino 4; así que concluimos que $\sqrt{-4}$ no existe en los $\mathbb{R}$eales

La radicación es una operación que no cumple con la propiedad clausurativa, que sí se cumple en la adición y multiplicación; así que se puede concluir que no siempre es posible determinar la raíz de un número real, este hecho es de suma importancia, toda vez que en álgebra y cálculo esta idea se emplea con mucha frecuencia al determinar el dominio de una función o la naturaleza de las soluciones de una ecuación.

Definición 5.2 Def. Alternativa de Radicación como una potencia

Sean a y m $\mathbb{R}$eales; y n $\mathbb{Z}^+$, se define $\sqrt[n]{a^m}$ así

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ siempre que } \sqrt[n]{a^m} \text{ exista}$$

a es el radicando, n el índice y m el exponente del radicando

Veamos un ejemplo del uso de la definición alternativa de Radicación como una potencia, en función del cálculo de raíces.

Ejemplo 5.5 –Uso de la definición alternativa de la Radicación.

Calcular el valor de $\sqrt{25}$

$\sqrt{25}$	Ejercicios dado
$\sqrt{5^2}$	Se descompone el radicando, es decir $25 = 5^2$
$5^{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}$	Aplicación de la definición alternativa de Radicación
5	Se obtiene este resultado luego de simplificar el exponente

En la práctica, el cálculo de la raíz planteada se efectúa así: $\sqrt[2]{25} = \sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}} = 5$, pero la utilidad de la definición alternativa de la Radicación se evidencia en un cálculo como el que sigue.

Ejemplo 5.6 –Uso de la definición alternativa de la Radicación.

Calcular el valor de $\sqrt{625}$

$\sqrt{625}$	Ejercicios dado
$\sqrt{5^4}$	Se descompone el radicando, es decir $625 = 5^4$
$\sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{4}}}$	Aplicación de la definición alternativa de Radicación
5^2	Se obtiene este resultado luego de simplificar $\frac{4}{2}$
25	Se efectúa la potenciación

Note que se aplicó la definición alternativa de la radicación, aunque no se escribió de forma explicita en el proceso de cálculo del ejercicio dado, pero, en todo caso, la práctica en Matemáticas es fundamental a la hora de dominar las definiciones y propiedades a emplear en las operaciones aritméticas en función de la eficiencia o rapidez al momento de realizar los procedimientos pedidos.

5.2 Leyes de la Radicación.

En razón a que no todas las raíces de números Reales son exactas y que con frecuencia debemos hacer cálculos que involucran varios radicales, lo que resta del capítulo estará dedicado a las propiedades de la radicación que van a ser muy útiles para efectuar operaciones entre radicales, conservando la exactitud en los cálculos.

Propiedad 5.1 Potencia de una Raíz.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ siempre que } \sqrt[n]{a} \text{ exista}$$

Ejemplo 5.7 –Simplificación de Potencia de una Raíz.

Uso *Correcto*	Uso *Incorrecto*
Calcular $\left(\sqrt{49}\right)^2$	Calcular $\left(\sqrt{-4}\right)^2$
$\left(\sqrt[\cancel{2}]{49}\right)^{\cancel{2}}$	$\left(\sqrt[\cancel{2}]{-4}\right)^{\cancel{2}}$
49	-4

En el caso $\left(\sqrt{-4}\right)^2$, es incorrecto ya que $\sqrt{-4}$ no existe, como lo exige la propiedad.

Propiedad 5.2 Raíz de una Potencia.
Para simplificar $\sqrt[n]{a^n}$ se deben considerar dos posibilidades.

1). Índice n par	2). Índice n impar
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$	$\sqrt[n]{a^n} = a$

El ejemplo que sigue presenta tres opciones en las cuales hay que aplicar la propiedad a fin de obtener la simplificación.

Ejemplo 5.8 –Simplificación de Raíz de una Potencia.

Efectuar cada una de las siguientes operaciones:

$\sqrt[4]{5^4}$	$\sqrt[4]{(-4)^4}$	$\sqrt[3]{2^3}$	$\sqrt[3]{(-3)^3}$
$\lvert 5\rvert$	$\lvert -4\rvert$	2	-3
5	4	2	-3

hasta el momento hemos visto como calcular raíces de números reales sin el uso de la calculadora. En síntesis podemos decir que hay raíces exactas e inexactas y, raíces de índice par e impar. Una raíz de índice par tiene dos respuestas, pero no existen raíces de índice par de números Reales negativos. En contraste con lo anterior las raíces de índice impar sólo tienen una respuesta, y siempre va a existir la raíz con índice impar de cualesquier número Real.

En lo sucesivo consideramos sólo la solución positiva de las raíces de índice par de números reales positivos.[1]

5.3 Simplificación de un Radical.

Hemos efectuado el cálculo de radicales cuya raíz es exacta. Hay radicales cuya raíz no es exacta, pero a fin de realizar ciertas operaciones, es posible expresarlos de forma simplificada. En las propiedades que siguen supondremos que todas las raíces existen.

Propiedad 5.3 Raíz de un Producto

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

La Raíz de un Producto es igual al Producto de las Raíces

Ejemplo 5.9 –Simplificación de un Radical.

Simplificar $\sqrt{20}$

$\sqrt{20}$	Ejercicio dado
$\sqrt{2^2\cdot 5}$	Descomponer en factores primos el radicando 20
$\sqrt{2^2}\sqrt{5}$	Aplicando la propiedad Raíz de un Producto
$\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}\sqrt{5}$	Aplicando la propiedad Raíz de una Potencia
$2\sqrt{5}$	Resultado

El uso de las leyes de la multiplicación son fundamentales para realizar cálculos de simplificación. El ejercicio siguiente muestra la necesidad de aplicar la propiedad disociativa de la multiplicación para expresar la potencia 2^3 como $2^2\cdot 2$.

Ejemplo 5.10 –Simplificación de un Radical.

Simplificar $\sqrt{72}$

[1] Se consideran las dos soluciones de una raíz de índice par de un número Real, cuando son el resultado del cálculo de la solución de una ecuación.

$\sqrt{72}$	Ejercicio dado
$\sqrt{2^3 \cdot 3^2}$	Descomponer en factores primos el radicando 72
$\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2}$	Disociar convenientemente 2^3 en dos potencias de forma que una de ellas sea un cuadradro perfecto como es 2^2
$\sqrt{2^2}\sqrt{2}\sqrt{3^2}$	Aplicando la propiedad Raíz de un Producto
$\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}\sqrt[\cancel{2}]{3^{\cancel{2}}}\sqrt{2}$	Aplicando la propiedad Raíz de una Potencia
$2 \cdot 3\sqrt{2}$	Se efectúa el producto de las dos raíces obtenidas
$6\sqrt{2}$	Resultado

Las propiedades de las operaciones entre números Reales se aplican en cualquier sentido, es decir, en el ejemplo anterior se aplicó la propiedad (5.3) de derecha a izquierda, expresando la Raíz de un producto como el producto de dos raíces. Cuando estamos realizando una simplificación puede ser conveniente usar las propiedades en el otro sentido, en este caso específico vamos a presentar un ejemplo en el cual es más útil expresar el producto de dos raíces como la raíz del producto de sus radicandos.

Ejemplo 5.11 –Simplificación de un Producto de Radicales.

Simplificar $\sqrt{6}\sqrt{30}$

$\sqrt{6}\sqrt{30}$	Ejercicio dado
$\sqrt{6}\sqrt{30} = \sqrt{6 \cdot 30}$	Aplicando la propiedad Raíz de un Producto
$\sqrt{180}$	Multiplicando 6 por 30
$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$	Descomponer en factores primos el radicando 180
$\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}\sqrt[\cancel{2}]{3^{\cancel{2}}}\sqrt{5}$	Aplicando las propiedades Raíz de un Producto y Raíz de una Potencia
$2 \cdot 3\sqrt{5}$	Se efectúa el producto de las dos raíces obtenidas
$6\sqrt{5}$	Resultado

El ejemplo nos presenta un ejercicio en el cual se aplica una misma propiedad en distinto sentido con el objeto de obtener la simplificación de la operación.

Propiedad 5.4 Raíz de un Cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

La Raíz de un Cociente es igual al Cociente de las Raíces

Ejemplo 5.12 –Simplificación de un Radical.

Simplificar $\sqrt{\frac{50}{121}}$

$\sqrt{\dfrac{50}{121}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\dfrac{5^2 \cdot 2}{11^2}}$	Descomponer en factores primos el radicando $\dfrac{50}{121}$
$\dfrac{\sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}}\sqrt{2}}{\sqrt[\cancel{2}]{11^{\cancel{2}}}}$	Aplicando las propiedades Raíz de un Cociente, de un Producto y de una Potencia
$\dfrac{5\sqrt{2}}{11}$	Resultado

Mostramos ahora un ejemplo donde la simplificación se logra cuando aplicamos la propiedad Raíz de un cociente en sentido contrario a lo presentado en el ejemplo precedente.

Ejemplo 5.13 –Simplificación de un Radical.

Simplificar $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\dfrac{18}{2}}$	Aplicando la propiedad Raíz de un Cociente
$\sqrt{9}$	Simplificando la fracción $\dfrac{18}{2}$
3	Resultado

Otra forma de realizar este ejercicio es descomponiendo 18 como $3^2 \cdot 2$, luego simplificar $\sqrt{3^2 \cdot 2}$ a $3\sqrt{2}$, con lo cual se obtiene $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ y al simplificar el factor común $\sqrt{2}$ logramos llegar al mismo resultado 3.

Las propiedades o leyes de la radicación ofrecen una variedad de caminos posibles, según se opte por la aplicación de una u otra propiedad al momento de simplificar una expresión, sólo la práctica nos permitirá saber cual es el camino más *económico* y *simple* posible al momento de realizar una cierta simplificación.

Propiedad 5.5 Raíz de una Raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

La Raíz de Raíz de a es igual a la Raíz de a con índice igual al producto de los índices n y m

Ejemplo 5.14 –Simplificación de un Radical.

Simplificar $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$	Ejercicio dado
$\sqrt[6]{64}$	Aplicando la propiedad Raíz de una Raíz
$\sqrt[6]{2^6}$	Descomponer en factores primos el radicando 64
$\sqrt[\cancel{6}]{2^{\cancel{6}}}$	Aplicando la propiedad Raíz de una Potencia
2	Resultado

La propiedad anterior nos permite expresar como un sólo radical la raíz de una raíz de diferente índice; ocasionalmente se requiere expresar o simplificar como un sólo radical el producto de dos radicales de diferente índice.

Ejemplo 5.15 –Simplificación de un Radical.

Simplificar a un sólo radical $\sqrt{2}\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{5}$	Ejercicio dado
$\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{5^2}$	Definición alternativa de un Radical
$\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}$	Aplicando la propiedad Raíz de un Producto
$\sqrt[6]{200}$	Resultado, luego de efectuar las operaciones indicadas

En el paso dos del ejemplo, la definición alternativa de un radical se aplico en este sentido. Lo primero es ver que el MCM entre 2 y 3 es 6, por lo cual para poder representar los dos radicales en uno sólo, deben tener el mismo índice, el cual es 6. Ahora, tenemos el radical $\sqrt[2]{2}$, que expresado según esta definición es $2^{1/2}$, necesitamos que el denominador sea 6, así que amplificamos la fracción 1/2, multiplicando por 3 tanto el numerador como el denominador, obteniendo $2^{3/6}$ que expresado nuevamente como un radical es $\sqrt[6]{2^3}$. Dejamos al lector el análisis del otro radical.

5.4 Simplificación de Cocientes y Productos de Radicales.

Las propiedades de la radicación se pueden emplear convenientemente al momento de efectuar operaciones indicadas de radicación, los ejemplos que siguen ilustran esta idea.

Ejemplo 5.16 -Simplificación de un cociente de Radicales

Simplificar $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\dfrac{32}{2}}$	Raíz de un cociente
$\sqrt{16}$	Simplificación de fracciones
$\sqrt[\cancel{2}]{4^{\cancel{2}}}$	Descomposición en factores
4	Raíz de una potencia

Ejemplo 5.17 -Simplificación de un producto de radicales

Evaluar $\sqrt{\frac{2}{25}}\sqrt{2}$

$\sqrt{\dfrac{2}{25}}\sqrt{2}$	Ejercicio dado
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}}\dfrac{\sqrt{2}}{1}$	Raíz de un cociente
$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$	Se efectúa el producto de fracciones y se aplica raíz de un producto en el numerador
$\dfrac{2}{5}$	Se calculan las raíces de 4 y 25

5.5 Simplificación de Potencias y Radicales.

Es frecuente hallar ejercicios en los cuales están indicadas operaciones de potenciación, radicación, adiciones y sustracciones y, como de costumbre, se van efectuando las operaciones más internas como lo presenta el ejercicio siguiente.

Ejemplo 5.18 -Simplificación de una expresión con radicales

Simplificar $\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{27\cdot 3}}$

$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{27\cdot 3}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{81}}$	Efectuando el producto $27\cdot 3$
$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{6^2}-\sqrt{9^2}}$	Descomponiendo los números 36 y 81
$\sqrt{4+9+2\cdot 6-9}$	Se aplica raíz de una potencia
$\sqrt{16}$	Simplificando el radicando, efectuando las operaciones indicadas
4	Se halla la raíz de 16

La práctica va permitiendo realizar de forma conveniente ciertas operaciones, note como en los ejercicios anteriores se ha descompuesto en factores, no primos, números como $81 = 9^2$, esto con el objetivo de aplicar la propiedad de raíz de una potencia de forma más inmediata, ya que si se descompone como $81 = 3^4$, no es tan inmediato que se simplifica el índice del radical con el exponente, aunque en últimas se llegaría al mismo resultado.

5.6 Racionalización.

La racionalización es un procedimiento que consiste en determinar una expresión equivalente pero en la cual el radical aparezca en el numerador.[2].

[2] En cálculo diferencial se suele emplear la racionalización pero para eliminar el radical del numerador

Procedimiento 5.1 Racionalización de un Radical de Índice Dos.
Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{b}{\sqrt{a}}$ se amplifica la fracción multiplicándola por $\sqrt{a}$, así

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{a}$$

El objetivo al amplificar la fracción multiplicándola por $\sqrt{a}$ es aplicar la propiedad de los radicales (5.1) en el denominador y así poder eliminar el radical del mismo.

Ejemplo 5.19 –Racionalizar un Denominador.

Racionalizar $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$	Ejercicio dado
$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$	Amplificar la fracción multiplicando por $\sqrt{3}$
$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$	Simplificar aplicando la propiedad (5.1) de la radicación

Ejemplo 5.20 –Racionalizar un Denominador.

Racionalizar $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

$\frac{8}{3\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$	Amplificar la fracción multiplicando por $\sqrt{2}$
$\frac{8\cdot\sqrt{2}}{(3)\cdot(2)}$	Simplificar aplicando la propiedad (5.1) de la radicación
$\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}$	Simplificar por el factor común 2

Procedimiento 5.2 Racionalización de un Radical con Índice mayor a Dos
Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ con $n \neq 2$ se amplifica la fracción multiplicándola por $\sqrt[n]{a^p}$, así

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^p}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^p}}{a} \text{ siempre que } m+p=n$$

Significa que en este caso hay que tener en cuenta el exponente que tiene el radicando, para poder multiplicar por una potencia conveniente, veamos un ejemplo

Ejemplo 5.21 –Racionalizar un Denominador.

Racionalizar $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$

$\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$	Ejercicio dado
$\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}$	Amplificar la fracción multiplicando por $\sqrt[3]{3^2}$
$\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}}$	Simplificar aplicando la propiedad (5.1) de la radicación y potenciación
$\frac{5\sqrt[3]{3^2}}{3}$	Simplificar por el radical

Procedimiento 5.3 –Racionalización de una Resta de radicales de Índice dos.
Para racionalizar la expresión $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ se amplifica multiplicando por $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$, es decir

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo 5.22 –Racionalizar una Diferencia de Radicales.

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{4\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$	Amplificar multiplicando por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$\frac{4\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$	Simplificar aplicando distributiva el denominador
$4(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	Respuesta, luego de efectuar la resta en el denominador.

El paso tres, puede ser entendido como una aplicación del procedimiento (5.3) o como la aplicación de la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, en efecto, la operación $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, se resuelve así:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{3}\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sqrt{2}=\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2=3-2=1$$

En el proceso de cálculo se han aplicado, además de distributiva, propiedades de exponentes y radicales.

Procedimiento 5.4 Racionalización de una Suma de radicales de Índice dos
Para racionalizar la expresión $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ se amplifica multiplicando por $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$, es decir

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo 5.23 –Racionalizar una Suma de Radicales.

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{-6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$

$\frac{-6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$	Ejercicio dado
$\frac{-6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}$	Amplificamos multiplicando por $(\sqrt{11}+\sqrt{5})$
$\frac{-6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{11-5}$	Simplificando el producto en el denominador
$\frac{-\cancel{6}\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{\cancel{6}}$	Efectuando la resta en el denominador
$-(\sqrt{11}-\sqrt{5})$	Resultado luego de cancelar el factor 6

En los dos ejemplos de simplificación de sumas y restas de radicales mostrados, no efectuamos el producto en el numerador, ya que con frecuencia el resultado del denominador se cancela con un factor en el numerador. Veamos un ejemplo en el cual sí sea necesario efectuar la multiplicación en el numerador con el objetivo de simplificar la expresión dada.

Ejemplo 5.24 –Simplificación de un radical.

Racionalizar $\frac{1-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

$\frac{1-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{(1-2\sqrt{14})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$	Multiplicar por el factor $(\sqrt{7}-\sqrt{2})$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\sqrt{14}\sqrt{7}+2\sqrt{14}\sqrt{2}}{7-2}$	Realizar distributiva en el numerador y denominador
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\sqrt{98}+2\sqrt{28}}{5}$	Propiedad, producto de radicales, $\sqrt{14}\sqrt{7}=\sqrt{14\cdot 7}=\sqrt{98}$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\cdot 7\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{7}}{5}$	Simplificación de radicales, $\sqrt{98}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=7\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-14\sqrt{2}+4\sqrt{7}}{5}$	Efectuando multiplicaciones indicadas
$\frac{\cancel{5}\sqrt{7}-\cancel{15}\sqrt{2}}{\cancel{5}}$	Simplificando los radicales comunes
$\sqrt{7}-3\sqrt{2}$	Resultado, luego de dividir todos los términos por 5

En el paso tres del procedimiento, en el denominador se efectuó la propiedad distributiva, pero ya se sabe que su resultado es $7-2$, de los ejercicios precedentes. El aspecto a resaltar es que se identifica por cual factor hay que multiplicar la fracción para poder eliminar los radicales del denominador, lo demás en el desarrollo, son operaciones y propiedades de la potenciación y radicación.

6 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Definición 6.1 Definición de ecuación

Una ecuación es una igualdad que contiene una o varias incógnitas.

Una incógnita representa un número real tal que al evaluar la ecuación con esa cantidad, la ecuación se convierte en una igualdad. Este proceso se denomina de verificación, ya que con él se puede establecer si un determinado valor es en efecto una raíz de una ecuación.
Las ecuaciones se clasifican según su forma algebraica y en consecuencia hay un procedimiento para hallar su solución o raíz, en caso de que exista.
La ley de uniformidad de la igualdad, se emplea constantemente cuando se busca la raíz de una ecuación.

Propiedad 6.1 Ley de uniformidad de la igualdad.

1. Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o resta una misma cantidad real, entonces la ecuación no se altera.
2. Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por una constante diferente de cero, entonces la ecuación no varía.
3. Si a ambos miembros de una ecuación se les extrae la misma raíz, entonces la ecuación que resulta tiene al menos, las mismas soluciones que la ecuación original.
4. Si ambos miembros de una ecuación se le eleva a una misma potencia, entonces la ecuación resultante tendrá al menos, las mismas soluciones que la ecuación original.

Cuando una ecuación es manipulada mediante una aplicación de la potenciación y/o radicación, puede ocurrir que la nueva ecuación tenga soluciones que no verifican a la ecuación original.

6.1 Ecuaciones lineales

Definición 6.2 Ecuación lineal

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, se llama lineal o de primer grado

Procedimiento 6.1 –Solución de una ecuación de primer grado o lineal.
Para resolver una ecuación lineal se aíslan todos los términos que contienen a la variable en el lado izquierdo y los que son constantes en el lado derecho, aplicando alternativamente el literal 1 o 2 de la ley de uniformidad de la igualdad.

Ejemplo 6.1 –Uso de la ley de uniformidad.

$$\begin{aligned} x+10 &= -6 && \text{Ejercicio dado} \\ x+10-10 &= -6-10 && \text{ley de uniformidad, restar 10 en ambos lados} \\ x &= -16 && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

Se resta 10, porque es la cantidad con la cual se elimina el 10 del lado derecho, a fin de despejar la x. El *efecto* de la ley uniforme, es que el 10 se transpone de lado, cambiando de sumar a restar.

Ejemplo 6.2 –Solución de una ecuación lineal.

$$\begin{aligned} x+8-2x-2 &= 3x-6 && \text{Ejercicio dado} \\ x-2x-3x &= 2-8-6 && \text{ley de uniformidad} \\ -4x &= -12 && \text{Simplificando términos semejantes} \\ x &= \frac{-12}{-4} = 3 && \text{Ley de uniformidad} \end{aligned}$$

Comprobamos ahora, que el valor calculado sea efectivamente la solución buscada.

$$\begin{aligned} x+8-2x-2 &= 3x-6 && \text{Ejercicio dado} \\ (3)+8-2(3)-2 &= 3(3)-6 && \text{Reemplazar } x \text{ con } 3 \\ 3 &= 3 && \text{Simplificar en cada lado, sin transponer términos} \end{aligned}$$

Si se obtiene una igualdad, significa que el valor calculado, sí es una raíz de la ecuación.

Ejemplo 6.3 –Solución de una ecuación lineal con fracciones.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2} &= \frac{2x+4}{5} && \text{Ejercicio dado} \\ 10\left(\frac{x-3}{2}\right) &= 10\left(\frac{2x+4}{5}\right) && \text{Ley uniforme, se multiplica por 10, que es el MCM de 2 y 5} \\ 5(x-3) &= 2(2x+4) && \text{Simplificar en cada lado} \\ 5x-15 &= 4x+8 && \text{Ley distribujtiva} \\ 5x-4x &= 8+15 && \text{Ley uniforme} \\ x &= 23 && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

Multiplicar por el MCM de los denominadores resulta conveniente, porque así se eliminan las fracciones.

6.2 Ecuaciones cuadráticas

Definición 6.3 Ecuación cuadrática o de segundo grado

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$, se conoce como ecuación cuadrática

Según el teorema fundamental del álgebra, una ecuación polinómica de grado 2 tiene como máximo dos raíces. Las raíces de una ecuación cuadrática pueden ser reales o complejas.
Una ecuación cuadrática puede tener: dos soluciones reales, una o ninguna.
Los procedimientos para resolver una ecuación cuadrática dependen de las condiciones que establecen sus coeficientes.
Cuando se resuelven ecuaciones cuadráticas, se emplea con frecuencia la siguiente propiedad.

Propiedad 6.2 Propiedad de multiplicación por cero.
Si la multiplicación $ab=0$ entonces $a=0$ o $b=0$ o ambos a la vez

Procedimiento 6.2 –Cómo resolver una ecuación cuadrática por factorización

1. Se iguala acero la expresión dada.
2. Se factoriza la expresión empleando las técnicas para factorización de trinomios de tipo cuadrático.
3. Se emplea la propiedad de multiplicación por cero, igualando a cero cada uno de los factores.
4. Se resuelven las expresiones obtenidas, aplicando las técnicas para solución de ecuaciones lineales.

Se denominan ecuaciones cuadraticas incompletas, cuando la expresión no tiene los tres términos enunciados en la definición.

Ejemplo 6.4 **–Resolviendo una ecuacón cuadrática.**

$$x^2-16 = 0 \quad \text{Ejercicio dado}$$

$$(x-4)(x+4) = 0 \quad \text{Factorizar la expresión}$$

$$x-4=0 \quad \text{o} \quad x+4=0 \quad \text{Propiedad de multiplicación por cero}$$

$$x=4 \quad \text{o} \quad x=-4 \quad \text{Resolver cada ecuación}$$

Otra forma de proceder en este ejercicio es $x^2=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$, con lo cual se llega a las mismas soluciones.

Ejemplo 6.5 **–Resolviendo una ecuacón cuadrática.**

$$4x^2-20x = 0 \quad \text{Ejercicio dado}$$

$$4x(x-5) = 0 \quad \text{Factorizar la expresión}$$

$$4x=0 \quad \text{o} \quad x-5=0 \quad \text{Propiedad de multiplicación por cero}$$

$$x=4 \quad \text{o} \quad x=5 \quad \text{Resolver cada ecuación}$$

Ejemplo 6.6 –Resolviendo una ecuacón cuadrática.

$$
\begin{array}{lll}
3x^2+2x-5 & =0 & \text{Ejercicio dado}\\
(3x+5)(x-1) & =0 & \text{Factorizar la expresión}\\
3x+5=0 \quad \text{o} & x-1=0 & \text{Propiedad de multiplicación por cero}\\
x=-\dfrac{5}{3} \quad \text{o} & x=1 & \text{Resolver cada ecuación}
\end{array}
$$

En ocasiones las soluciones de una ecuación cuadrática son números irracionales, en estas situaciones la técnica o procedimiento anterior puede no funcionar.
Este tipo de ejercicios se pueden resolver empleando la fórmula cuadrática o general.

Propiedad 6.3 Fórmula General o Cuadrática
Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ están dadas por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 6.7 –Resolviendo una ecuacón cuadrática usando la fórmula General.

$$
\begin{array}{ll}
3x^2-5x+1=0 & \text{Ejercicio dado}\\
\text{Identificar}\begin{cases} a=3\\ b=-5\\ c=1\end{cases} & \\
x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{Fórmula General}\\
x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(1)}}{2(3)} & \text{Reemplazar}\\
x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6} & \text{Simplificar}\\
x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \text{ y } x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6} & \text{Raíces}
\end{array}
$$

Toda ecuación cuadrática se puede resolver empleando la fórmula general, sin embargo, puede ser mucho más dispendioso este procedimiento, que buscar una factorización.

Propiedad 6.4 Sobre las raíces de una ecuación de tipo cuadrático.

1. La suma de las raíces es igual a $\frac{b}{a}$.
2. El producto de las raíces es $\frac{c}{a}$.

6.3 Ecuaciones de tipo lineal

Definición 6.4 Ecuaciones de tipo lineal

Son ecuaciones en las que luego de realizar un proceso de simplificación, se obtiene una expresión de tipo lineal.

La ecuación de ejemplo que sigue, no parece ser lineal, por el término cuadratico.

Ejemplo 6.8 –Solución de una ecuación de tipo lineal.

$x^2+3x-8=x^2+2x+20$	Ejercicio dado
$3x-8=2x+20$	Ley uniforme, simplificar x^2
$3x-2x=20+8$	Ley uniforme, tansponer términos
$x=28$	Simplificando

El proximo ejemplo muestra una ecuación que no parece lineal, ya que la variable hace parte de un denominador.

Ejemplo 6.9 –Ecuaciones de tipo lineal.

$\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x+6}=1$	Ejercicio dado
$(x+2)(x+6)\left\{\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x+6}\right\}=(x+2)(x+6)$	Ley uniforme, multplicar por el mcm de los denominadores
$x(x+6)+4(x+2)=(x+2)(x+6)$	Ley distributiva y simplificación de fracciones
$x^2+6x+4x+8=x^2+8x+12$	Ley distributiva y producto notable
$6x+4x-8x=12-8$	Ley uniforme
$2x=4\Rightarrow x=2$	Simplificación y ley uniforme

En los dos ejemplos, luego de una simplificación, se llega a una ecaución lineal.
En este tipo de ecuaciones, es fundamental comprobar que la raíz encontrada sí sea efectivamente una solución de la ecuación original.

6.4 Ecuaciones de tipo cuadrático

Son ecuaciones cuyo grado es par y mayor a 2, usualmente este tipo de ecuaciones se pueden resolver empleando las técnicas que se anunciaron para resolver ecuaciones cuadráticas o por medio de una sustitución de variable. Este es un procedimiento por medio del cual se busca simplificar la expresión original con una sustitución conveniente qué conduzca a una ecuación más simple.

Ejemplo 6.10 –Resolviendo ecuaciones de tipo cuadrático.

$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$			Ejercicio dado
$z^2 - 3z - 10 = 0$			Con $z = x^2$
$(z-5)(z-2) = 0$			Factorizar la expresión
$z - 5 = 0$	o	$z - 2 = 0$	Propiedad de multiplicación por cero
$z = 5$	o	$z = 2$	Resolver cada ecuación
$x^2 = 5$	o	$x^2 = 2$	Sustituir con $z = x^2$
$x = \pm\sqrt{5}$	o	$x = \pm\sqrt{2}$	Resolver cada ecuación

Ejemplo 6.11 –Resolviendo ecuaciones de tipo cuadrático.

$(2x-1)^2 + 7(2x-1) + 12 = 0$			Ejercicio dado
$z^2 + 7z + 12 = 0$			Con $z = 2x - 1$
$(z+4)(z+3) = 0$			Factorizar la expresión
$z + 4 = 0$	o	$z + 3 = 0$	Propiedad de multiplicación por cero
$z = -4$	o	$z = -3$	Resolver cada ecuación
$2x - 1 = -4$	o	$2x - 1 = -3$	Sustituir con $z = 2x - 1$
$x = -\frac{3}{2}$	o	$x = -1$	Resolver cada ecuación

6.5 Ecuaciones con radicales

En este tipo de ecuaciones se debe usar la ley uniforme, elevando al cuadrado o una potencia adecuada con el proposito de simplificar los radicales.

Ejemplo 6.12 –Resolviendo una ecuación con un radical.

$7 - \sqrt{x-4} = 3$	Ejercicio dado
$-\sqrt{x-4} = 3 - 7$	Despejando el radical
$\left(-\sqrt{x-4}\right)^2 = (-4)^2$	Ley uniforme, elevando al cuadrado
$x - 4 = 16$	Simplificación
$x = 20$	Ley uniforme

Ejemplo 6.13 –Resolviendo una ecuación con dos radicales.

$10-\sqrt{25+9x}=3\sqrt{x}$	Ejercicio dado
$\sqrt{25+9x}=3\sqrt{x}-10$	Despejando el radical mas complejo
$\left(\sqrt{25+9x}\right)^2=\left(3\sqrt{x}-10\right)^2$	Ley uniforme, elevando al cuadrado
$25+9x=9x-60\sqrt{x}+100$	Simplificación / producto notable
$60\sqrt{x}=75\Rightarrow 4\sqrt{x}=5$	Ley uniforme
$\left(4\sqrt{x}\right)^2=5^2$	Ley uniforme
$16x=25\Rightarrow x=\frac{25}{16}$	Simplificación y ley uniforme

Ejemplo 6.14 –Resolviendo una ecuación con tres radicales.

$\sqrt{4x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$	Ejercicio dado
$\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}\right)^2$	Ley uniforme, elevando al cuadrado
$(4x+5)-2\sqrt{4x+5}\sqrt{x}+(x)=x+3$	Producto notable / Simplificación
$-2\sqrt{x}\sqrt{4x+5}=-4x-2$	Ley uniforme / despejando el radical
$\sqrt{x}\sqrt{4x+5}=2x+1$	Ley uniforme, dividiendo por -2
$\left(\sqrt{x}\sqrt{4x+5}\right)^2=(2x+1)^2$	Ley uniforme, elevando al cuadrado
$x(4x+5)=4x^2+4x+1$	Simplificación / producto notable
$4x^2+5x=4x^2+4x+1$	Ley distributiva
$x=1$	Ley uniforme

6.6 Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando se tienen dos o más ecuaciones con dos o más variables, se dice que es un sistema de ecuaciones.

Definición 6.5 Sistemas de ecuaciones lineales.
Son los que se forman con ecuaciones lineales o de primer grado.

Cuando se busca la solución de un sistema de ecuaciones lineales, se deben encontrar tantos valores como variables tenga el sistema. No siempre es posible hallar las raíces, las ecuaciones en sí mismas conducen a una contradicción.
Un sistema se denomina compatible cuando tiene solución, e incompatible cuando no la hay.
La solución de un sistema de ecuaciones puede ser un conjunto finito o infinito de valores.

Métodos para resolver un sistema lineal 2 por 2.

Procedimiento 6.3 –Eliminación por sustitución.

1. De una de las ecuaciones se despeja una de las variables.
2. El valor despejado se reemplaza o sustituye en la otra ecuación.
3. la expresión obtenida ha de ser una ecuación lineal en una variable, la cual se debe resolver.
4. El valor obtenido en el paso anterior, se reemplaza en una de las ecuaciones originales para establecer la otra variable.

Ejemplo 6.15 **–Solución de un sistema por sustitución.**

$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 4x+y=9 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 2	Ejercicio dado
$y=9-4x$	Ec. 3	Se despeja y de la Ec. 2
$3x+4(9-4x)=10$		Reemplazar la Ec. 3 en la Ec. 1
$3x+36-16x=10$		Ley distributiva
$-13x=-26$		Ley uniforme
$x=2$		Ley uniforme

Ahora, se reemplaza el valor de x calculado, en la Ec. 3

$y=9-4x$	Ec. 3
$y=9-4(2)$	Reemplazando con $x=2$
$y=1$	Simplificando

La solución del sistema es $x=2$ y $y=1$

La elección de despejar y de la Ec. 2, se hace porque es la variable cuyo coeficiente es 1, por tanto el depeje será muy simple.
Al reemplazar la Ec. 3 en la Ec. 1, se eliminó la variable y.

Procedimiento 6.4 –Eliminación por igualación

1. Despejar la misma variable de ambas ecuaciones.
2. Igualar las expresiones despejadas.
3. La ecuación obtenida es una ecuación lineal en una variable, la cual se debe resolver.
4. Reemplazar el valor anterior en las ecuaciones originales o preferiblemente en las ecuaciones equivalentes que se obtuvieron en el paso uno, para establecer el valor de la segunda variable.

Ejemplo 6.16 –Solución de un sistema por igualación.

$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 4x+y=9 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 2	Ejercicio dado
$y=9-4x$	Ec. 3	Se despeja y de las Ec. 1 y 2
$y=\dfrac{10-3x}{4}$	Ec. 4	
$9-4x=\dfrac{10-3x}{4}$		Igualar las Ec. 3 y 4
$4(9-4x)=10-3x$		Ley uniforme, multiplicar por 4
$36-16x=10-3x$		Ley distributiva
$x=2$		Ley uniforme

Reemplazando $x=2$ en las Ec. 1, 2, 3 o 4, se obtiene $y=1$.

Procedimiento 6.5 –Eliminación por reducción.

1. Multiplicar convenientemente las ecuaciones por un número real de manera que los coeficientes de una de las dos variables, sean de igual valor pero de signo contrario.
2. Sumar miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas para reducir una de las variables.
3. La ecuación obtenida es lineal en una variable, está se debe resolver.
4. Reemplazar el valor obtenido en una de las dos ecuaciones iniciales.

Ejemplo 6.17 –Solución de un sistema por reducción.

$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 4x+y=9 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 2	Ejercicio dado
$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 4x+y=9 \quad \text{por } -4 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 2	Multiplicar la Ec. 2 por -4
$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ -16x-4y=-36 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 3	Operando en la Ec. 2 para obtener la Ec. 3
$3x-16x=10-36$		Sumar miembro a miembro las Ec. 1 y 3
$x=2$		Simplificando / Ley uniforme

Reemplazando y resolviendo con $x=2$ en las Ec. 1, 2 o 3, se obtiene $y=1$.

Se ha multiplicado por -4, porque así se logra que la variable y en ambas ecuaciones, tenga el mismo valor numérico pero con diferente signo.

6.7 Sistemas de ecuaciones NO lineales

El procedimiento para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, involucra todos los procedimientos enunciados en la solución de ecuaciones y sistemas lineales explicados hasta el momento. Loe ejmplos clarifican esta idea.

Ejemplo 6.18 –Solución de un sistema No lineal.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 180 \\ x - y = 6 \end{cases}$	Ec. 1 Ec. 2	Ejercicio dado
$x = y + 6$	Ec. 3	Se despeja x de la Ec. 2
$(y+6)^2 + y^2 = 180$		Reemplazar la Ec. 3 en la Ec. 1
$y^2 + 12y + 36 + y^2 - 180 = 0$		Producto notable / Ley uniforme
$2y^2 + 12y - 144 = 0$		Simplificación
$y^2 + 6y - 72 = 0$		Ley uniforme, dividir por 2
$y_1 = 6$ y $y_2 = -12$		Raíces de la ecuación

Ahora, se reemplazan los valores de y calculados, en la Ec. 3

con $y_1 = 6$	con $y_2 = -12$
$x_1 = 6 + 6$	$x_2 = -12 + 6$
$x_1 = 12$	$x_2 = -6$
Sol. $(12, 6)$	Sol $(-6, -12)$

La Ec. 1 representa una circunferencia y la dos una línea recta, por lo cual la intesección entre ellas puede tener un máximo de dos puntos, como en efecto ocurrió en este ejemplo.

7 Logaritmación.

7.1 Concepto de logaritmo

Ya se han definido seis de las siete operaciones aritméticas básicas, sólo resta por tratar la logaritmación. Como se ha mencionado anteriormente, existe una relación entre las operaciones aritméticas, la multiplicación es una suma abreviada, la potenciación es una multiplicación, igualmente abreviada. Presentamos una figura que aclara la relación existente entre las operaciones potenciación, radicación y logaritmación, tomando como base de la explicación la potenciación.

Estas tres operaciones no cumplen con la propiedad clausurativa, así que suponemos que en cada una de ellas es posible calcularlas para ciertos valores de a, b y n.

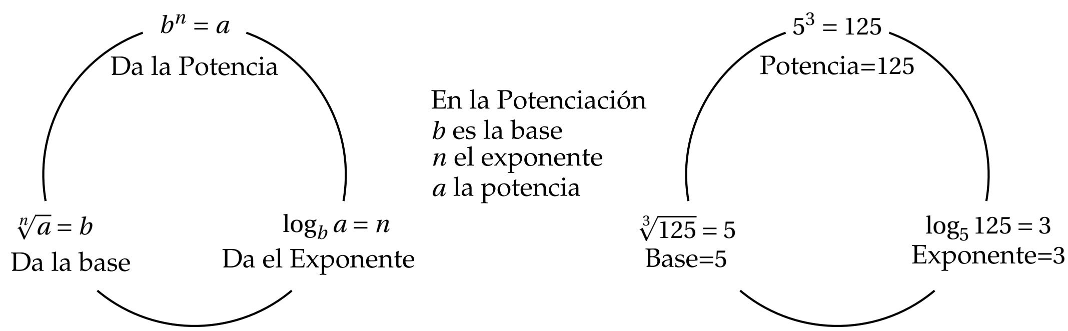


Figura 7.1: Relación entre Potenciación, Radicación y Logaritmación

Según la figura, la potenciación es una operación que pregunta por la potencia, conocida la base y el exponente; la radicación busca la base, dada la potencia y el exponente y, finalmente, la logaritmación trata de hallar el exponente cuando se conocen la potencia y la base.

Si bien es cierto que los términos de cada operación reciben un nombre diferente, la figura busca ilustrar la forma cómo se deben comprender estas operaciones tomando como base la poteciación, ya que es una operación que se puede evaluar aplicando la definición de la misma (definición 4.1), mientras que en el caso de las otras dos operaciones puede resultar complicado de establecer la respuesta bajo ciertas combinaciones de los valores a, b y n.

Definición 7.1 Logaritmación

Sean a, b y n $\mathbb{R}$eales, con a y b mayores que 0 y $a \neq 1$, se define $\log_a b$ así

$$\log_b a = n \text{ si y solamente si } b^n = a$$

En el logaritmo: b es la base, a el argumento y n el logaritmo

La expresión $\log_b a$ se lee "*Logaritmo en base b de a*" y para determinar su valor sin usar calculadora debemos apoyarnos en la potenciación como lo muestra el ejemplo que sigue.

Ejemplo 7.1 –Cálculo de un logaritmo.

Calcular logaritmo en base 5 de 125 simbólicamente $\log_5 125$
Buscamos un número n tal que 5^n sea 125; de nuevo descomponer en factores primos a 125 es útil para determinar la respuesta, $125 = 5^3$.
Ahora, nuevamente, se pregunta por un número n tal que 5^n sea 5^3, simbólicamente es $5^n = 5^3$, con lo cual resulta evidente que el logaritmo es $n = 3$

7.2 Logaritmos decimales y naturales.

El ejercicio precedente muestra un procedimiento que permite evaluar numerosos ejercicios en los cuales hay que calcular un logaritmo, y es descomponer en factores tanto el argumento como la base, de forma que ambos números queden expresados como potencia de un mismo número, el siguiente ejemplo presenta una estrategia de simplificación de logaritmos.

Ejemplo 7.2 –Cálculo de un logaritmo.

Calcular $\log_{225} 15$

$\log_{225} 15$	Ejercicio dado
$\log_{225} 15 = x$	Suponemos que el logaritmo es x
$\log_{15^2} 15 = x$	Se descompone la base 225 como 15^2
$(15^2)^x = 15$	Aplicación de la definición de logaritmo
$15^{2x} = 15$	Aplicación de potencia de una potencia
$2x = 1$	Si las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales
$x = \frac{1}{2}$	Se resuelve para x, que representa el valor del logaritmo pedido

Note que la descomposición de la base fue $225 = 15^2$ y no la descomposición en factores primos $225 = 3^2 \cdot 5^2$, ya que como se mencionó anteriormente, esta estrategia se basa en expresar la base y el argumento como potencias de una misma base, por tal motivo resulta más conveniente la primer descomposición.

Hay ejercicios en los cuales se requiere establecer la base, conocido el logaritmo y el argumento, veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.3 –Cálculo de la base en un logaritmo.

Calcular la base b si $\log_b 49 = 2$

$\log_b 49 = 2$	Ejercicio dado
$b^2 = 49$	Aplicación de la definición de logaritmo
$b^2 = 7^2$	Descomponer 49 como 7^2
$b = 7$	Si los exponentes son iguales, las bases deben ser iguales y se obtiene la respuesta $b = 7$

Veamos ahora cómo calcular el argumento de un logaritmo dada la base y valor del mismo.

Ejemplo 7.4 –Cálculo del argumento de un logaritmo.

Calcular el argumento a si $\log_3 a = -4$

$\log_3 a = -4$	Ejercicio dado
$3^{-4} = a$	Aplicación de la definición de logaritmo
$a = \frac{1}{3^4}$	Aplicación de propiedades de los exponentes
$a = \frac{1}{81}$	Efectuando las operación indicada se obtiene que la base a es $\frac{1}{81}$

La logaritmación no es una operación clausurativa, es decir, dada una base a y una potencia b no siempre existe un exponente n tal que $\log_a b = n$, ilustramos esta situación con un ejemplo.

Ejemplo 7.5 –Cálculo de un logaritmo sin solución Real.

Calcular el logaritmo en base 3 de -9 es decir $\log_3 -9$
Se requiere un número n tal que 3^n sea -9; NO se puede expresar -9 en base 3, ya que $(-3)^2 = 9$ y $(3)^2 = 9$, por tanto no es posible expresar -9 como una potencia de 3, así que $\log_3 -9$ no existe en los Reales.

El logaritmo planteado no cumple con las restricciones dadas en la definición de logaritmo, pero justamente se quiere ilustrar la imposibilidad de su cálculo.

Como una consecuencia de las propiedades de la potenciación y la definición de logaritmación, presentamos las siguientes definiciones que permiten evaluar logaritmos de forma rápida.

Definición 7.2 Definiciones de Logaritmos

Sean a y x $\mathbb{R}$eales, con a y x mayores que 0 y $a \neq 1$, se define que:

1).	$\log_a 1 = 0$	ya que $a^0 = 1$
2).	$\log_a a = 1$	pues $a^1 = a$
3).	$\log_a a^x = x$	debido a que $a^x = a^x$
4).	$a^{\log_a x} = x$	Al usar la definición de logaritmo se obtiene $\log_a x = \log_a x$

En la definición, el literal 4, se usó la definición de logaritmo de derecha a izquierda, es decir, expresamos la potenciación como un logaritmo.

7.3 Leyes de los Logaritmos.

Se listan ahora tres propiedades o leyes de los logaritmos que son de uso frecuente cuando se está simplificando una expresión.

Propiedad 7.1 Propiedades de los Logaritmos.

1). Log. de un Producto	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$	Es igual a la suma de los logaritmos
2). Log. de un Cociente	$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$	Es igual a la diferencia entre los logaritmos de M y N
3). Log. de una Potencia	$\log_a M^c = c \log_a M$	Es igual al producto del exponente por el log. de la base

Las propiedades son igualdades que son verdaderas bien sea que se apliquen en una dirección u otra, los ejemplos que siguen presentan la forma cómo se pueden emplear estas propiedades con el objeto de calcular el valor de un logaritmo.

Ejemplo 7.6 –Cálculo de un logaritmo empleando las propiedades.

Calcular $\log_2 \dfrac{1}{16}$

$\log_2 \dfrac{1}{16}$	Ejercicio dado
$\log_2 1 - \log_2 16$	Aplicación de la propiedad logaritmo de un cociente
$0 - \log_2 2^4$	Aplicación de la definición 7.2 literal 1, $\log_2 1 = 0$, y descomponer 16 como 2^4
$-4 \log_2 2$	Aplicación de la propiedad logaritmo de una potencia
$-4(1)$	Aplicación de la definición 7.2 literal 2, $\log_2 2 = 1$
-4	Se obtiene que $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$

Como se ha planteado anteriormente, existen diferentes formas de dar solución a un ejercicio lo cual depende de la forma y el orden en que se apliquen las propiedades. El ejemplo anterior se puede solucionar así: suponemos que $\log_2 \frac{1}{16} = x$, hay que expresar el argumento y la base como una potencia del mismo número, así que expresamos $\frac{1}{16}$ como $\frac{1}{2^4}$ y ahora como 2^{-4}. La expresión inicial es $\log_2 2^{-4} = x$ que usando la definición de logaritmo se puede escribir $2^x = 2^{-4}$, si las bases son iguales, los exponentes son iguales, por tanto $x = -4$ como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 7.7 –Cálculo de un logaritmo empleando las propiedades.

Determinar el valor de $\log_6 4 + \log_6 9$

$\log_6 4 + \log_6 9$	Ejercicio dado
$\log_6 [4 \cdot 6]$	Aplicación de la propiedad, logaritmo de un producto
$\log_6 36$	Efectuando la operación indicada
$\log_6 6^2$	Descomponer 36 como una potencia de 6
$2 \log_6 6$	Aplicando la propiedad logaritmo de una potencia
2	Ya que $\log_6 6 = 1$ por la definición 7.2 literal 2

Notemos que en el paso 2 se aplicó la propiedad logaritmo de un producto de derecha a izquierda, es decir, expresando la suma como un producto. Las tres propiedades anteriores se usaran con mucha frecuencia en los procedimientos que involucran logaritmos y se retoman en secciones posteriores de este libro.

Se han evaluado logaritmos con diferentes bases, vamos ahora a definir dos logaritmos que son de uso frecuente en las matemáticas aplicadas, estos son los logaritmos decimales y neperianos o en base *e*.

Definición 7.3 Logaritmos Decimales y Neperianos

Sea a un Real positivo, se definen dos logaritmos especiales así

Logaritmo Decimal	Logaritmo Neperiano o en base e
$\log_{10} a = \log a$	$\log_e a = \ln a$

La definición expresa que cuando veamos un ejercicio como $\log 100$, este tendrá base 10, al igual que $\ln 81$ tendrá base e.

Ejemplo 7.8 –Cálculo de un logaritmo decimal.

Calcular $\log 100$

$\log 100$	Ejercicio dado
$\log 10^2$	Se descompone 100 en base diez como 10^2
$2\log 10$	Aplicación de la propiedad logaritmo de una potencia
2	Ya que por definición $\log_{10} 10$ es 1

Cuando no se puede determinar un logaritmo haciendo uso de las propiedades en razón a que los números a, b y n no lo permiten, se puede emplear una calculadora de bolsillo. Hay en el mercado un gran número de marcas y modelos, sin embargo, las calculadoras casio son las más populares. De los modelos que se encuentran en el mercado hay dos series, una es $fx \cdots ES$ y otra $fx \cdots MS$. La primera serie posibilita hacer cálculos aritméticos y presentar los resultados en forma simbólica, ademas se pueden realizar operaciones con logaritmos en cualquier base. La serie $fx \cdots MS$ sólo permite realizar cálculos de logaritmos decimales y neperianos. significa que en una calculadora de la serie $fx \cdots MS$, no se puede evaluar $\log_2 9$. Para realizar este cálculo, vamos a recurrir a un procedimiento llamado cambio de base, este procedimiento se formaliza en la siguiente propiedad.

Propiedad 7.2 Fórmula de cambio de Base.
Sean a, p y b $\mathbb{R}$eales positivos con a, p diferentes de 1, el $\log_a b$ se puede cambiar a una base arbitraria p aplicando la siguiente fórmula

$$\log_a b = \frac{\log_p b}{\log_p a}$$

Ejemplo 7.9 –Cambio de base de un logaritmo.

Cambiar la base de $\log_2 64$ a 8
Identificamos en el ejercicio dado que $a = 2$, $p = 8$ y $b = 64$, por tanto se puede escribir que $\log_2 64 = \frac{\log_8 64}{\log_8 2}$, como se pedía

7.4 Simplificación de Productos y Cocientes de Logaritmos.

Ejemplo 7.10

Evaluar $\dfrac{\log_8 64 \cdot \log_4 16}{\log_{12} 144}$

$\dfrac{\log_8 64 \cdot \log_4 16}{\log_{12} 144}$	Ejercicio dado
$\dfrac{\log_8 8^2 \cdot \log_4 4^2}{\log_{12} 12^2}$	Expresamos el argumento y la base en función del mismo número, si es posible
$\dfrac{2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$	Aplicamos la definición $\log_a a^x = x$
2	Se simplifica la fracción

Para la base 8 y el argumento 64, el número común es 8, así que formulamos que $64 = 8^2$; se procede igual con las demás parejas.

7.5 Ecuaciones exponenciales

Este tipo de ecuaciones se pueden identificar porque ka variable hace parte del exponente de una expresíon. No hay técnicas específicas como las que se emplean para solucionar una ecuación cuadrática o lineal, debido a la cantidad opciones que hay de para simplificar la expresión o escribirla de forma equivalente a traves de las leyes de los exponentes.
El ejemplo presenta uno de los tantos métodos, el cual se base en la busqueda de bases iguales en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 7.11 –Solución de una ecuación exponencial.

$9^{-3x} = \left[\dfrac{1}{27}\right]^{x+3}$	Ejercicio dado
$\left(3^2\right)^{-3x} = \left(3^{-3}\right)^{x+3}$	Expresando las bases como potencia de 3
$3^{-6x} = 3^{-3(x+3)}$	Ley de expentes
$-6x = -3\,(x+3)$	Bases iguales, entonces expoenentes iguales
$-6x = -3x - 9$	Ley distributiva
$3x - 6x = -9 \Rightarrow -3x = -9$	Ley uniforme
$x = 3$	Ley uniforme / Simplificación

Hay ecuaciones exponenciales en las que se debe recurrir a una sustitución conveniente.

Ejemplo 7.12 **–Solución de una ecuación exponencial, con cambio de variable.**

$25^{\sqrt{x}} - 124\left(5^{\sqrt{x}}\right) = 125$		Ejercicio dado
$\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 124\left(5^{\sqrt{x}}\right) - 125 = 0$		Ley uniforme y de expoentes
$u^2 - 124u - 125 = 0$		Con $u = 5^{\sqrt{x}}$
$(u+1)(u-125) = 0$		Factorizando
$u = -1$	$u = 125$	Resolviendo la ecuación
$5^{\sqrt{x}} = 1$	$5^{\sqrt{x}} = 125$	Reemplazando con $u = 5^{\sqrt{x}}$
$5^{\sqrt{x}} = 5^0$	$5^{\sqrt{x}} = 5^3$	Leyes de exponentes
$\sqrt{x} = 0$	$\sqrt{x} = 3$	Bases iguales, entonces expenentes iguales
$x = 0$	$x = 9$	Ley uniforme, elevando al cuadrado

Sol. $x = 9$

Al verificar con el valor $x = 0$, se puede establecer que No es una solución de la ecuación $25^{\sqrt{x}} - 124\left(5^{\sqrt{x}}\right) = 125$, ya que no se cumple la igualdad.

7.6 Ecuaciones logarítmicas

Este tipo de ecuaciones se pueden resolver en su mayoría, simplificando a un sólo logarítmo en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 7.13 **–Solución de una ecuación logaritmica.**

$\log_6 3 + \log_6 (x+6) = 2$	Ejercicio dado
$\log_6 [3(x+6)] = 2$	Ley de logaritmos
$6^2 = 3(x+6)$	Definición de log. como exponencial
$36 = 3x + 18$	simplifacación / Ley distributiva
$x = 6$	Ley uniforme / simplificación

Sol. $x = 6$

Desde el paso tres, se pudo continuar así $\log_6 [3(x+6)] = \log_6 36 \Rightarrow 3(x+6) = 36$. Lo cual nos permite establecer la solución.

Hay ecuaciones exponenciales, en las cuales se debe emplear logaritmos, para obtener su solución.

Ejemplo 7.14 –Solución de una ecuación exponencial.

$(53{,}7)^x = 6{,}95$	Ejercicio dado
$\log(53{,}7)^x = \log 6{,}95$	Ley uniforme, log en ambos.
$x \log 53{,}7 = \log 6{,}95$	Ley de logaritmos
$x = \dfrac{\log 6{,}95}{\log 53{,}7}$	Ley uniforme
$x = 0{,}486704$	Simplificación, usando una calculadora

8 Inecuaciones

8.1 Ley de orden, concepto de valor absoluto

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado. Siempre es posible que al comparar dos números reales cualesquiera se cumpla sólo una de las siguientes condiciones.

Propiedad 8.1 Ley de tricotomía
Sean a y b números Reaales, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones.

1. $a > b$
2. $a < b$
3. $a = b$

Existen otros dos símbolos de relación que son condicionales, ya que se debe cumplir una y sólo una de las relaciones enunciadas.

La expresión $a \leq b$ significa que $a < b$ o bien $a = b$. De la misma manera si $a \geq b$, entonces $a > b$ o $a = b$.

Definición 8.1 Valor Absoluto de un Número Real

Sea x un número Real, entonces se define el Valor Absoluto de x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

8.2 Propiedades de las desigualdades

Propiedad 8.2 Ley de monotonía.

1. Si a ambos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, la desigualdad no cambia de sentido y sigue siendo verdadera.
2. Si a ambos miembros de una desigualdad se los multiplica o dividen por un mismo número real positivo, entonces la desigualdad no varía y sigue siendo verdadera.

3. Si ambos miembros de una desigualdad se los multiplica o divide por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

4. Si se suman miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad del mismo sentido.

5. Si se multiplican o dividen miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido cuyos miembros son números reales positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

6. Si ambos miembros de una desigualdad son elevados a una misma potencia impar, el sentido de la desigualdad no varía.

7. Si ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia par, siendo los dos miembros números reales negativos, se obtiene una desigualdad de signo contrario.

8. Si a ambos miembros de una desigualdad se les extrae una misma raíz de índice impar, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

8.3 Desigualdades lineales

Definición 8.2 Desigualdades lineales

Son inecuaciones que luego de simplificarse conducen a una expresión de la forma $ax \pm b > 0$.

La expresión puede contener cualquiera de los símbolos de inecuación.

Resolver una inecuación lineal consiste en establecer todos los valores de x que satisfacen la inecuación, es decir, que la convierten en una desigualdad verdadera.

Las soluciones de una inecuación se expresan por medio de intervalos, los cuales son un conjunto de números reales.

Propiedad 8.3 Tipos de intervalo.

1. Intervalo abierto: (a, b)

2. Intervalo Carrado: $[a, b]$

3. Intervalo semiabierto: $(a, b]$ o $[a, b)$

Procedimiento 8.1 –Resolver una inecuación lineal con una incógnita

1. Se efectúan todas las operaciones indicadas en la inecuación.

2. Se aísla la variable, normalmente en el miembro izquierdo de la inecuación y las constantes en el lado derecho de la misma

3. La expresión resultante es una expresión que denota el conjunto solución de la inecuación

La solución de una inecuación se puede presentar de 3 maneras: simbólicamente, en la recta real, como un intervalo o mediante un conjunto.

Ejemplo 8.1 –Solución de una inecuación lineal.

$2(x-3)+5<5-x$	Ejercicio dado
$2x-6+5<5-x$	Ley distributiva
$2x+x<6$	Ley de monotinía
$3x<6$	Simplificación
$x<\frac{6}{3} \Rightarrow x<2$	Ley de monotonía, dividir por 3

La ley de monotonía es el equivalente a la ley uniforme de la igualdad. En el segundo paso, se suma 6 en ambos lados de la inecuación, $2x-6+6+5<5-x+6 \Rightarrow 2x+5<5-x+6$. De la misma manera se resta 5 y se suma x, para obtener $2x+x<6$.

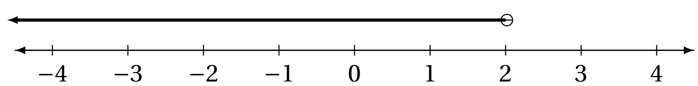


Figura 8.1: Intervalo Solución

La figura representa el intervalo solución $(-\infty, 2)$.

8.4 Desigualdades NO lineales

Este tipo de inecuaciones presentan expresiones algebraicas mucho más complejas, es decir, pueden aparecer expresiones de tipo cuadrático cubico, de grado cuatro o fracciones algebraicas.

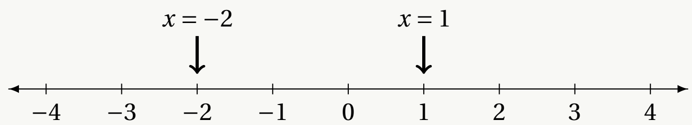
Hay básicamente dos estrategias de solución para inecuaciones no lineales. Ambas estrategias tienen como primer paso factorizar la expresión y compararla con cero.

Procedimiento 8.2 –Análisis de signo.

1. Determinanar los ceros de cada uno de los factores de la inecuación.
2. Ubicar los ceros en la recta real, la cual queda dividida en intervalos según estos ceros.
3. Asignanar valores de prueba para establecer el signo que toma la inecuación en ellos
4. Según la condición sea mayor, o menor que 0, se toman los intervalos en los cuales la inecuación cumple.

Ejemplo 8.2 –Solución de una inecuación cuadrática.

$(x+2)(x-1) > 0$ Ejercicio dado



Intervalo	De $-\infty$ a -2	De -2 a 1	De 1 a ∞
Valor de prueba	$x=-4$	$x=0$	$x=5$
Signo de $(x+2)(x-1)$	$(-4+2)(-4-1)=10$	$(0+2)(0-1)=-2$	$(5+2)(5-1)=28$
	Positivo	Negativo	Positivo

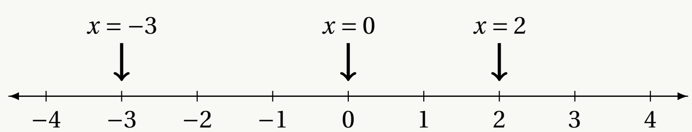
La condición es que la expresión sea mayor que cero, por lo tanto los intervalos solución deben ser donde el signo es positivo.

Sol. $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$

Los intervalos son cerrados, porque la inecuación es estrictamente mayor que cero.

Ejemplo 8.3 –Solución de una inecuación racional.

$\dfrac{x(x+3)}{(x-2)} \geqslant 0$ ejercicio dado



Intervalo	De $-\infty$ a -3	De -3 a 0	De 0 a 2	De 2 a ∞
Valor de prueba	$x=-5$	$x=-2$	$x=1$	$x=4$
Signo de $\dfrac{x(x+3)}{(x-2)}$	$\dfrac{-5(-5+3)}{(-5-2)}=-\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{-2(-2+3)}{(-2-2)}=\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1(1+3)}{(1-2)}=-4$	$\dfrac{4(4+3)}{(4-2)}=14$
	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

La condición mayor igual a cero, implica que el conjunto solución incluya los valores donde la expresión $\frac{x(x+3)}{(x-2)}$ sea cero, esto es cuando $x=0$ o -3, por tanto la respuesta es:
Sol. $[-3,0]\cup(2,\infty)$

No se puede incluir el valor 2, debido a que la expresión es No definida, dado que el denominador se hace cero.

Bibliografía

[1] Kline. M. (1972). *El pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.* EEUU. Alianza Universidad.

[2] Newman. R. (1968). *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas.* México. Grijalbo.

[3] Baldor. A. (2001). *Aritmética Teórico Práctica.*. México. 19na reimpresión, Publicaciones Cultural, S.A.

[4] Londoño. N. (1996). *Dimensión Matemática.* Medellín. Norma.

[5] Londoño. N. (1984). *Matemática Progresiva.* Medellín. Norma.

[6] Uribe. J. (1991). *Elementos de Matemáticas.* Medellín. Bedout.

[7] Vélez. A. (1989). *Álgebra Moderna.* Medellín. Editorial U de A.

[8] Swokowski. E. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México. Cengage.

[9] Stewart. J. (2012). *Precálculo, 6a. Ed.* México. Cengage.

[10] Sullivan. M. (1997). *Precálculo, 4a. Ed.* México. Prentise Hall.

[11] Hoffmann. A. (2014). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios.* McGraw-Hill Interamericana.

[12] Bello. I. (2008). *Matemáticas Básicas Universitarias.* McGraw-Hill Interamericana.

[13] Goñi. J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid. Ministerio de Educación de España - Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

[14] Guarín. H. (1987). *Introducción al Simbolismo Lógico.* Medellín. Norma.

[15] Guarín. H. (2000). *Introducción a los Sistemas Numéricos.* Medellín. Editorial U de A.

[16] Wills. D. (1987). *Matemática Moderna Estructurada 1.* Medellín. Norma.

[17] Polya. G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México. Trillas.

[18] Arcila. M. (2012). *Micro de Matemáticas.* Medellín. Recuperado de http://masweb.co/edu.

[19] Arcila. M. (2007). *Ejercicios de Matemáticas para Olimpiadas.* Medellín. Recuperado de http://masweb.co/icfes.

[20] Wolfram. S. (2007). *Math.* EEUU. Recuperado de https://www.wolframalpha.com/examples/Arithmetic.html

[21] Scrib. (2013). *Ejercicios de Matemáticas.* EEUU. Recuperado de https://es.scribd.com/

mi U Colmayor Es Calidad

Quédate
con el Álgebra

Quédate en COLMAYOR!

Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos